



ELEMENTOS DE ÁLGEBRA DE BOOLE

ANALÓGICO vs. DIGITAL

Una **señal analógica** se caracteriza por presentar un numero infinito de valores posibles.

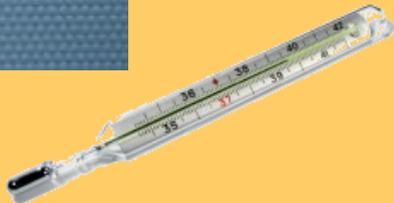


Posibles valores:
1.00, 1.01,
200003,...,
infinitas
posibilidades

Una **señal digital** solo puede tomar un numero finito de valores.



Posibles valores:
0, 1, 2, 3
o 4.





¿ANALÓGICO o DIGITAL?

Cuáles cantidades son analógicas y cuales son digitales:

- 1. La temperatura del agua en la playa.**
- 2. Los granos de arena en un recipiente.**
- 3. El número de olas que golpea la playa.**
- 4. El peso de una ola.**
- 5. La gente que se encuentra en un radio de 1 kilómetro cuadrado**



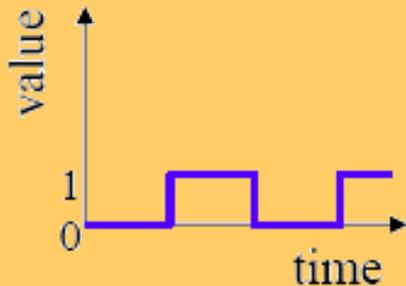


SEÑALES BINARIAS O LÓGICAS

Señal digital que puede tomar solo dos posibles valores (Niveles lógicos).



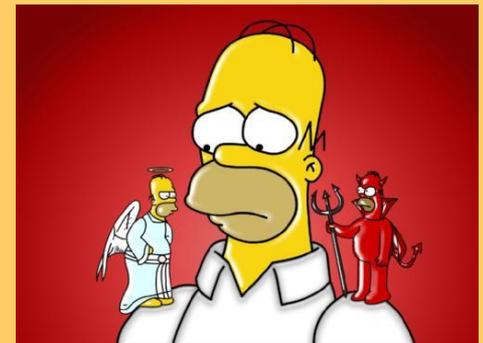
Los niveles lógicos típicamente se representan con 1 y 0.



Cada dígito se denomina bit (binary digit).

Un nivel lógico puede representar varias cosas.

0	1
falso	verdadero
off	on
0 Volt	24 Volt
rojo	verde
no	si

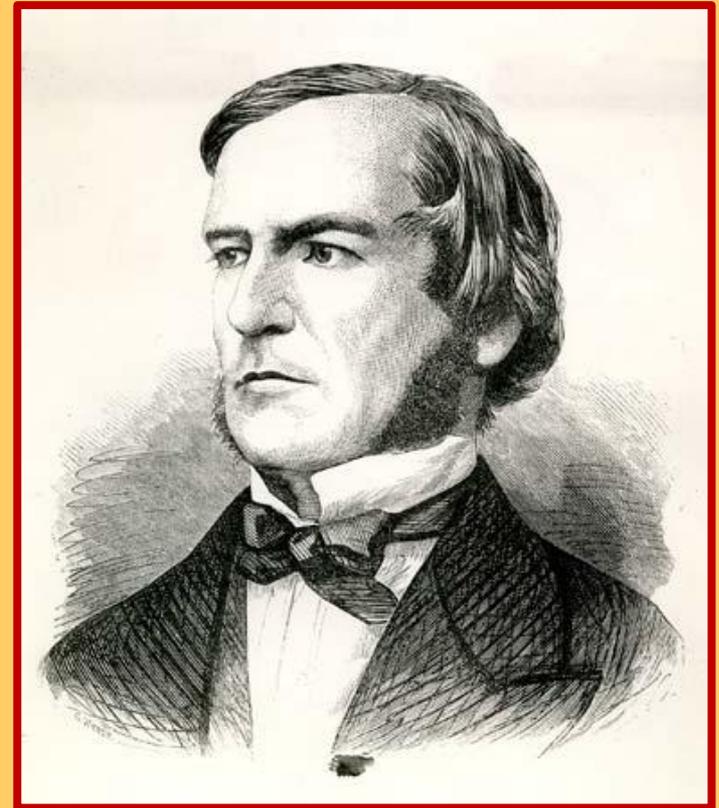




ÁLGEBRA DE BOOLE

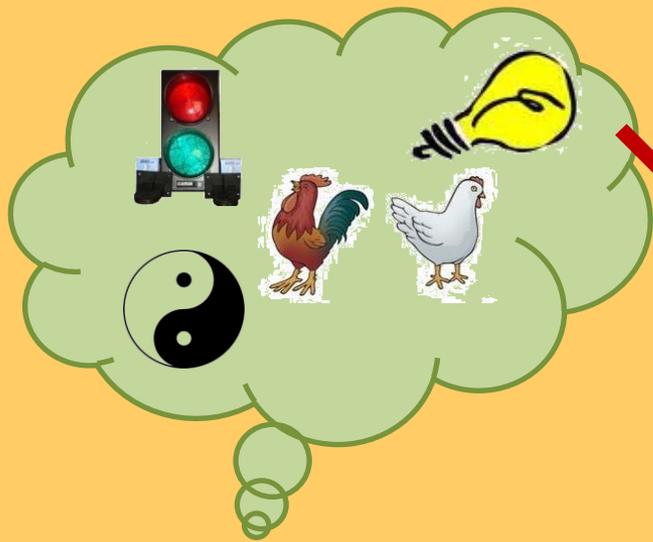
ÁLGEBRA BOOLEANA es una herramienta desarrollada por **George Boole** en el siglo XIX para representar proposiciones lógicas en forma algebraica. Se propuso analizar cómo se toman decisiones lógicas basado en circunstancias verdaderas o falsas. Resultó una herramienta para modelar matemáticamente el pensamiento lógico.

Claude Shannon en 1938 aplicó esta herramienta para la descripción de sistemas de eventos discretos y para la representación de circuitos lógicos y diseño digital.



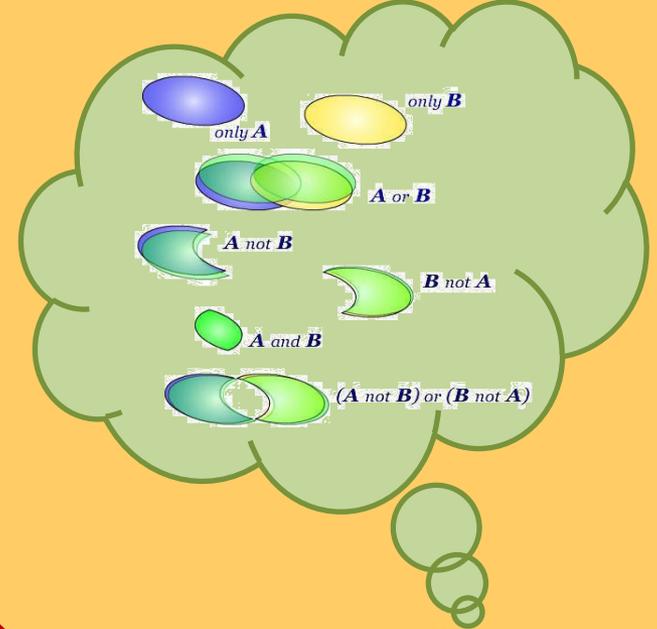
George Boole
(1815-1864)

ÁLGEBRA DE BOOLE



ÁLGEBRA BOOLEANA

Símbolos + Operadores



Proposición: enunciado que puede ser catalogado como cierto o falso

Toda proposición se le puede asignar una variable.

A = "Hoy está lloviendo"

A puede ser CIERTO o FALSO.
Si es CIERTO, **A = 1** y si es FALSO **A = 0**



A





ÁLGEBRA DE BOOLE

Un álgebra está definida por:

- ▶ Un conjunto de elementos B
- ▶ Un conjunto de operaciones F que actúan sobre los miembros de B
- ▶ Un conjunto de propiedades que se aceptan que son válidas (postulados)

El **Álgebra de Boole** está definida por:

- ▶ Un conjunto B de sólo **dos** elementos **$\{0,1\}$**
- ▶ Un conjunto de tres operaciones (lógicas) que actúan sobre los miembros de B :
 - Suma lógica (OR)
 - Producto lógico (AND)
 - Negación (NOT)
- ▶ Un conjunto de 6 postulados (clausura, ley conmutativa, ley asociativa, ley distributiva, identidad y complemento)



RELACIÓN ENTRE VARIABLES LÓGICAS

$a = \text{"N es múltiplo de 2"}$

$b = \text{"N es múltiplo de 3"}$

Tanto a como b pueden ser **CIERTAS** O **FALSAS** (valer **1** o **0**).

Hay dos formas de conectar (de relacionar a con b):

- ▶ $a + b = a \text{ OR } b = \text{"N es múltiplo de 2 o N es múltiplo de 3"}$
- ▶ $a \cdot b = a \text{ AND } b = \text{"N es múltiplo de 2 y N es múltiplo de 3"}$

Una tercera operación sería negar (complementar):

- ▶ $\bar{a} = \text{NOT } a = \text{"N no es múltiplo de 2"}$

El resultado de estas operaciones puede ser **CIERTO** o **FALSO** (o sea son variables lógicas)



OPERADOR OR SUMA LÓGICA

$$a + b = c$$

Se lee: “a” OR (o) “b” es igual a “c”

Significa que si “a” es verdadero (a=1) O “b” es verdadero (b=1) entonces “c” es verdadero (c=1). De lo contrario “c” es falso (c=0).

DIAGRAMA DE CONTACTOS

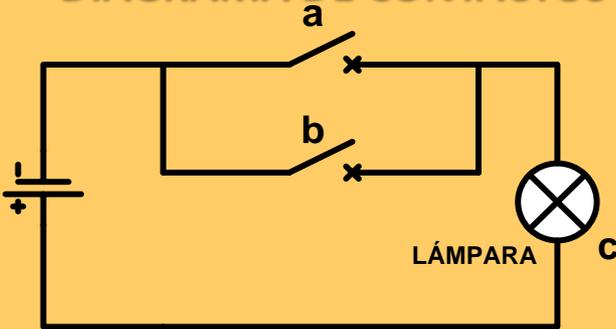
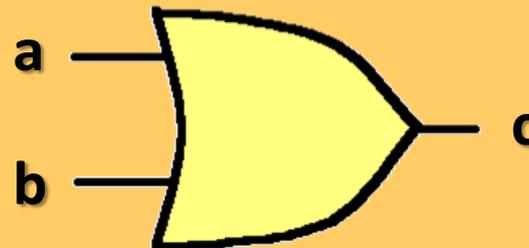


TABLA DE LA VERDAD

a	b	c
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**DIAGRAMA DE
COMPUERTAS LÓGICAS**





OPERADOR AND PRODUCTO LÓGICO

$$a \cdot b = c$$

Se lee: “a” AND (y) “b” es igual a “c”

Significa que si “a” es verdadero (a=1) Y “b” es verdadero (b=1) entonces “c” es verdadero (c=1). De lo contrario “c” es falso (c=0).

DIAGRAMA DE CONTACTOS

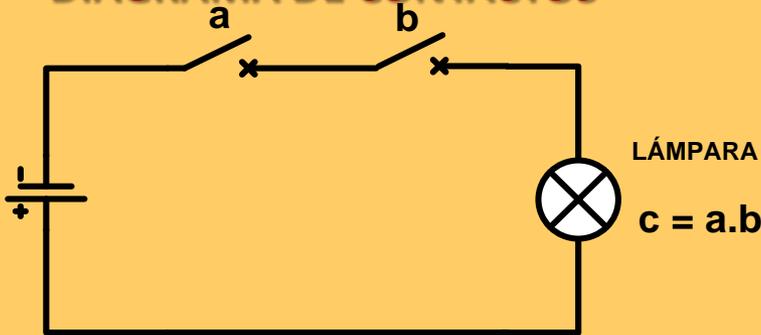
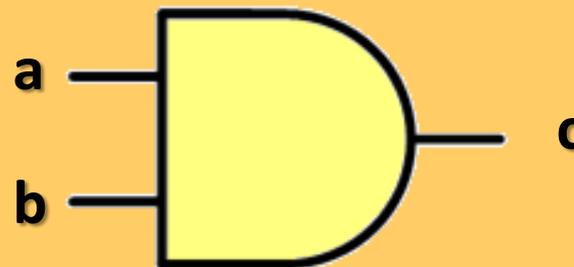


TABLA DE LA VERDAD

a	b	c
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

DIAGRAMA DE COMPUERTAS LÓGICAS





OPERADOR NOT NEGACIÓN O COMPLEMENTO

$$\bar{a} = c$$

Se lee: NOT (no) “a” es igual a “c”
 “a” negada es igual a “c”
 complemento de “a” es igual a “c”

Significa:

Si “a” es verdadero (a=1) complemento de “a” es falso (c=0)
 Si “a” es falso (a=0) complemento de “a” es verdadero (c=1)

DIAGRAMA DE CONTACTOS

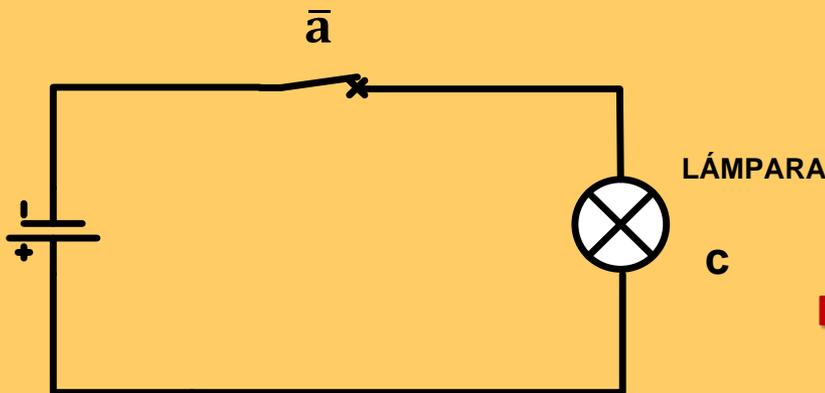
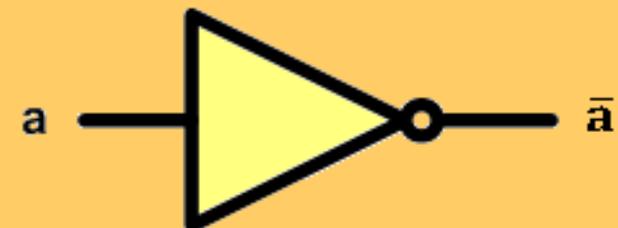


TABLA DE LA VERDAD

a	\bar{a}
0	1
1	0

**DIAGRAMA DE
COMPUERTAS
LÓGICAS**





EXPRESIONES BOOLEANAS

Es la combinación de variables lógicas mediante las operaciones definidas.

$$a + \bar{a} \cdot b$$

Se lee “a” o no “a” y “b”

a = “Los ingenieros saben Transformada de Laplace”

b = “Los ingenieros son intuitivos”

$a + \bar{a} \cdot b$ Significa: “Los ingenieros saben Transformada de Laplace o, no saben Transformada de Laplace y son intuitivos”

El resultado puede ser cierto o falso (0 o 1). Esta propiedad se llama **CLAUSURA**.



PROPIEDADES Y TEOREMAS

Todo postulado, axioma ó ley ó teorema tiene su forma **dual**:

Propiedad		Forma dual
$+$	\rightarrow	\cdot
\cdot	\rightarrow	$+$
0	\rightarrow	1
1	\rightarrow	0

Las equivalencias se demuestran usando postulados y/ó teoremas o bien por inducción completa analizando las tablas de verdad.



AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL DE PROCESOS

PROPIEDADES Y TEOREMAS

Nº	NOMBRE	Forma OR	Forma AND (dual)
1	Identidad	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
2	Elemento nulo	$a + 1 = 1$	$a \cdot 0 = 0$
3	Idempotencia	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
4	Complemento ó inverso	$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$
5	Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$

PROPIEDADES Y TEOREMAS

6	Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7	Distributiva	$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$	$(a + b) \cdot (a + c) = a + (b \cdot c)$
8	Absorción	$a + a \cdot b = a$	$a \cdot (a + b) = a$
9	Consenso	$a + \bar{a} \cdot b = a + b$	$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$
10	De Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
11	Involución ó doble negación		$\overline{\bar{a}} = a$



FUNCIONES DE BOOLE

Para variables reales $z = f(x,y)$ significa que para cada pares de valores reales (x,y) le corresponde uno y solo un valor de z .

En forma análoga, si a y b son variables binarias:

$$m = F(a,b)$$

F es una **función booleana** y define que *a cada par de valor (a,b) , le corresponde un solo valor de m* . La diferencia notable es que el número de valores de m es finito.

$$(a,b) \in \{0,1\} \text{ y } m \in \{0,1\}$$



FUNCIONES DE BOOLE

La funciones de Boole pueden representarse de diversas formas:

- ▶ **Expresiones analíticas**
- ▶ **Tabla de la verdad**
- ▶ **Diagrama de compuertas lógicas**
- ▶ **Diagrama de contactos**

Expresiones analíticas

Se usan expresiones booleanas con los operadores definidos

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{F(a, b, c)} \\ &= \mathbf{(a + b) \cdot \bar{c}} \end{aligned}$$



FUNCIONES DE BOOLE

$$m = F(a, b, c) = (a + b) \cdot \bar{c}$$

Tabla de la verdad

Tabla que representa el valor de la función para cada combinación de las variables de entrada. Si la función está definida para todas las combinaciones se llama **completa**, si no, se denomina **incompleta**.

Columnas
auxiliares
↓ ↓

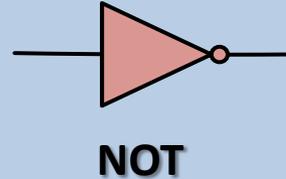
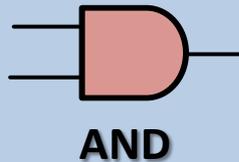
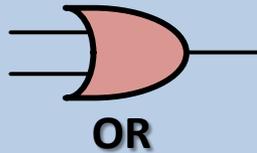
Función
F(a,b,c)
↓

a	b	c	a+b	\bar{c}	$(a + b) \cdot \bar{c}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

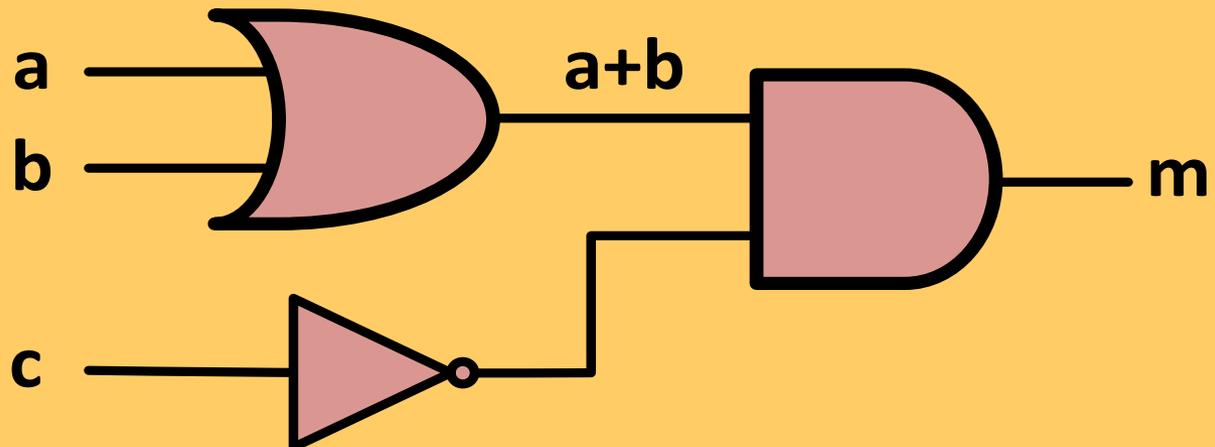
FUNCIONES DE BOOLE

Diagrama de compuertas lógicas

Forma **gráfica** que usa las compuertas:



$$\begin{aligned} m &= F(a, b, c) = \\ &= (a + b) \cdot \bar{c} \end{aligned}$$

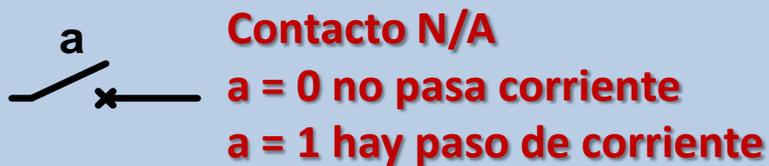




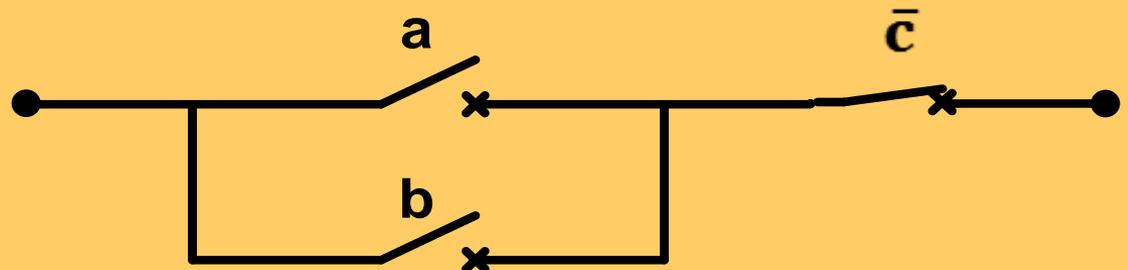
FUNCIONES DE BOOLE

Diagrama de contactos

Es otra forma **gráfica** con contactos (interruptores o switch) entre dos puntos: a la derecha el de alto potencial y a la izquierda tierra. El resultado (valor de la función) es **CIERTO (1)** cuando circula corriente, de lo contrario, el resultado es **FALSO (0)**.



$$m = F(a, b, c) = (a + b) \cdot \bar{c}$$





FUNCIONES DE BOOLE EQUIVALENTES

Dos **funciones booleanas F y G son equivalentes** si ambas tienen la misma tabla de la verdad. Pueden tener una estructura algebraica distinta, pero para cada combinación de las variables de entrada dan los mismos resultados de F y G.

Para demostrar que dos funciones son equivalentes se puede recurrir a dos procedimientos:

- ▶ Se construyen las tablas de la verdad para ambas y si coinciden son equivalente (**inducción completa**)
- ▶ Se parte de una y usando axiomas y teoremas se llega a demostrar que es igual a la otra.

Este concepto es muy útil para generar funciones más simples a partir de funciones complejas. (Hay otros procedimientos sistemáticos)

FUNCIONES DE BOOLE EQUIVALENTES

Considere las funciones de Boole:

$$F(a,b,c) = a+b \cdot c$$

$$G(a,b,c) = (a+b)(a+c)$$

Demostrar equivalencia por inducción completa

a	b	c	$a+b \cdot c$	$(a+b)(a+c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1





SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES DE BOOLE

Simplificar la función $D = F(A,B,C)$:

$$D = \bar{B}C + \bar{A}BC + ABC + \bar{A}B\bar{C}$$

$$D = \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + BC(\bar{A} + A)$$

$$D = \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + BC$$

$$D = \bar{A}B\bar{C} + C(\bar{B} + B)$$

$$D = \bar{A}B + C$$

(P. Distributiva)

(Complemento – E. nulo)

(P. Distributiva)

(Complemento – E. nulo - Consenso)

$$D = \bar{B}C + \bar{A}BC + ABC + \bar{A}B\bar{C}$$

$$D = \bar{A}B + C$$

EQUIVALENTES



FORMAS NORMALIZADAS DE LAS FUNCIONES BOOLEANAS

Todas las funciones booleanas pueden ser escritas en la forma **suma de productos** o en la forma **producto de sumas**. Estas formas pueden simplificar la implementación de expresiones lógicas y hacer el trabajo mucho más sistemático y sencillo.

Cuando dos o más productos se suman mediante la adición booleana, la expresión resultante se denomina **SUMA DE PRODUCTOS (Minterm)**.

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB$$

$$AB\bar{C} + \bar{C}\bar{D} \quad CD + \bar{E}$$

Cuando dos o más términos suma se multiplican, la expresión resultante se denomina **PRODUCTO DE SUMAS (Maxiterm)**

$$(\bar{A} + B)(A + \bar{B} + C)$$

$$(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(C + \bar{D} + E)(\bar{B} + C + D)$$



FORMAS CANÓNICAS DE LAS FUNCIONES BOOLEANAS

Cuando la función booleana se expresa como suma de productos y cada término contiene todas las variables (afirmadas o negadas) la expresión resultante se denomina **FORMA CANÓNICA DE SUMA DE PRODUCTOS.**

$$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{C} + \overline{\overline{A}}\overline{B}\overline{C} + \overline{\overline{A}}\overline{B}C + \overline{A}\overline{\overline{B}}\overline{C} + \overline{A}\overline{\overline{B}}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$$

Cuando la función booleana se expresa como producto de sumas y cada factor contiene todas las variables (afirmadas o negadas) la expresión resultante se denomina **FORMA CANÓNICA DE PRODUCTO DE SUMAS.**

$$(A + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + C)$$



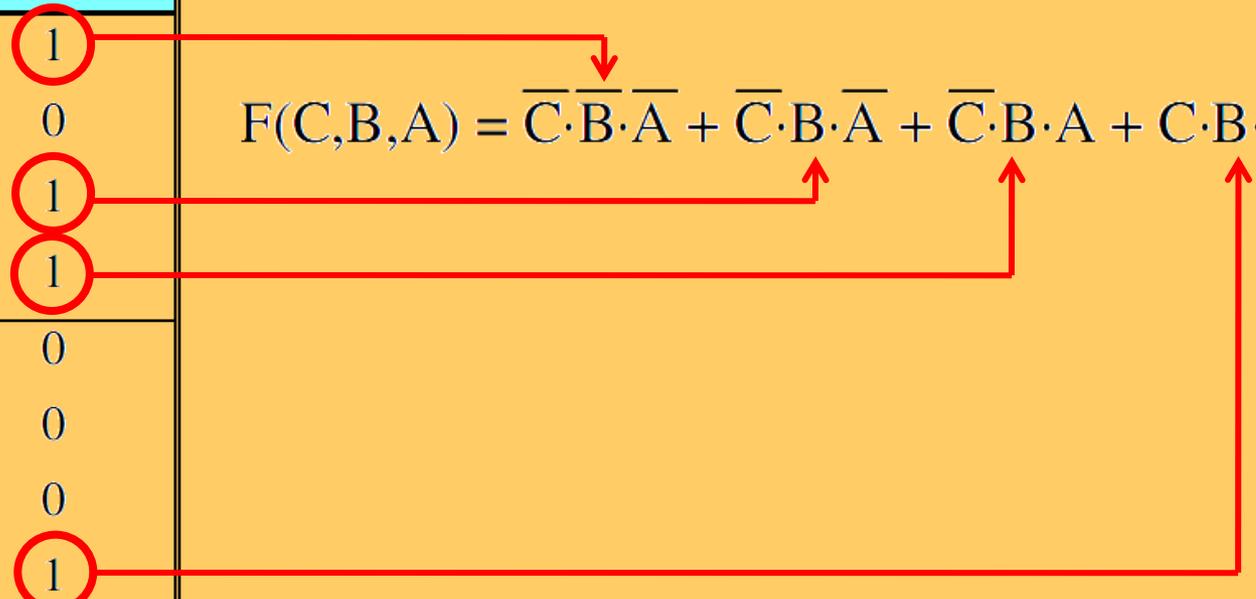
CONVERTIR TABLA DE VERDAD EN FUNCIÓN BOOLEANA

Para obtener la expresión algebraica de una **suma canónica de productos** representada por una tabla de verdad se deben considerar solo las filas con valor de la **función igual a 1**.

Cada fila se convierte en el correspondiente término producto, reemplazando **cada 1 por la variable y cada 0 por la variable negada**.

C	B	A	F(C,B,A)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(C,B,A) = \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} + \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A} + \overline{C} \cdot B \cdot A + C \cdot B \cdot A$$





CONVERTIR TABLA DE VERDAD EN FUNCIÓN BOOLEANA

Para obtener la expresión algebraica de un **producto canónico de sumas** representada por una tabla de verdad se deben considerar solo las filas con valor de la **función igual a 0**.

Cada fila se convierte en el correspondiente factor de suma, reemplazando **cada 0 por la variable** y **cada 1 por la variable negada**.

C	B	A	F(C,B,A)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(C,B,A) = (C+B+\bar{A}) \cdot (\bar{C}+B+A) \cdot (\bar{C}+B+\bar{A}) \cdot (\bar{C}+\bar{B}+A)$$

Versión DUAL de la anterior



¿PARA QUÉ SIRVEN LAS FUNCIONES DE BOOLE?

En control automático, las funciones de Boole se usan para relacionar señales de entrada al sistema de control (mediciones) con las señales que van a actuar sobre el proceso (actuadores). Esto es particularmente cierto para el caso de Control Combinacional (las salidas son funciones booleanas de las entradas).

