Ejercicios Integradores para 2do parcial de AMII y CNIII

1)

a) Sea $z=F(x^2y,x+y)$, F diferenciable hasta el orden 2 en R^2.
Calcular z_x, z_{xy} .

b) Dadas $F(u,v)=3\,u^3\cos^2 v$, $g(x,y)=(x^2 y,\ x+y)$,

i) Encontrar $F_o g$.

ii) Calcular $\frac{\partial}{\partial x}(F_o g)$ usando i).

iii) Calcular $\frac{\partial}{\partial x}(F_o g)$ usando a).

2)

a) Dada la ecuación $x^3+4x^2y+\cos^3(y+z)+z=0$. Probar que define a z como función diferenciable de x e y en un entorno de $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y calcular z_x en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Si la ecuación $z^3+F(xyz^2)+x^3=1$ define a z como función diferenciable de x e y, siendo F continuamente diferenciable, calcular z_x.

3) Sean las superficies de ecuación: $(z-3)^2 = 3(x^2+y^2)$, $x^2+y^2+(z-1)^2=1$
Probar que son tangentes en $Q_0\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

4) Dada la función $f(x,y)= 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$,

a) Analizar sus extremos relativos.

b) ¿Podría decir algo sobre sus extremos absolutos?

5)

a. Sabiendo que la presión en el espacio viene dada por $P(x,y,z)=xz+y$, si una partícula se mueve en el espacio siguiendo la trayectoria $g(t)=(t^2, \text{sen}\, t, t)$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Encontrar la presión a la que es sometida la partícula en función del tiempo. ¿La presión se anula en algún instante de tiempo?.¿La velocidad con que cambia la presión es nula en ese instante de tiempo?.

b. Pruebe que si $z=F(\cos x, y^3)$ con F continuamente diferenciable hasta el orden 2, $z_{xy} = z_{yx}$.

6)

a. Si z es función diferenciable de x e y definida por la ecuación $x^3 - x\,y\,z + z^3 + \cos y + 8 = 0$ en un entorno de $P_0\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, encontrar el $\nabla z\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b. Si la ecuación $G(x \operatorname{sen} z) + 9 - z\,y = 0$ define a z como función diferenciable de x e y, G diferenciable en R, calcular z_y .

7) Si un proyectil sigue la trayectoria:

$$g(t) = (t^3, 2\,t, t^2),\ t \in (0,2)$$

en función del tiempo, ¿colisionará ortogonalmente en el punto (1,2,1) con la superficie, que bajo el mismo sistema de referencia, tiene ecuación

$$3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z^2 - 13 = 0?$$

8) Dada la función $f(x,y) = y^4 - 6\,x + x^2 - 8\,y^2$,

a. Analizar sus extremos relativos.
b. ¿Podría decir algo sobre sus extremos absolutos?

9) Dado el campo vectorial

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(x \cos z, x \operatorname{sen} z, \sqrt{1-x^2}\right)$$

¿Es f diferenciable en (0,1,0) y en (1,2,0)? En caso afirmativo, calcule la matriz jacobiana en ese punto.