ANÁLISIS MATEMÁTICO II – CÁLCULO NIVEL III

T.P.Nº 8

1. Si $f(x,y) = \begin{pmatrix} x + xy + 1 \\ y + 2 \end{pmatrix}$ y $g(u,v) = \begin{pmatrix} u + v \\ 2u \\ v \end{pmatrix}$. ¿Son diferenciables?. Si la respuesta es afirmativa encuentre la matriz Jacobiana de la composición $g \circ f$ en el punto (1, 1).

2. Sean $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (u^2 + v^2, u\,v)$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ diferenciable hasta el orden 2.

   Si $F = f \circ \varphi$, calcular :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v}$$

3. Si F y G son funciones reales diferenciables hasta el orden dos , calcular z_x , z_y , z_{xx} , z_{yx}

   a) $z = F(x^2 y)$

   b) $z = xy - 4x^2 F(\sec^2 x)$

   c) $z = F(\operatorname{tg}(x+y)) + G(x y^2)$

4. Si G es continuamente diferenciable hasta el orden 2, calcular z_x , z_y , z_{xx} , z_{yx}

   a) $z = G(\operatorname{sen}^2 x, y^3 x)$ b) $z = G(2x, 3y^2 x) + 2\,G(2x^3, 2y+x)$

   Si en el apartado a) se toma $G(u, v) = u^2 + v$, encuentre z_x usando el resultado de dicho ejercicio y luego calcule nuevamente z_x realizando previamente la composición de funciones.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, t^2 - 4, e^{t-2})$ y $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$ una función diferenciable.

   Si $F = g \circ f$ y $P_o = f(2)$, calcule $\frac{dF}{dt}(2)$ sabiendo que $\frac{\partial g}{\partial x}(P_o) = 4$, $\frac{\partial g}{\partial y}(P_o) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial z}(P_o) = 2$.

6. Si $y = f(x - a\,t) + g(x + a\,t)$, donde a es constante y f y g son diferenciables

de orden dos, demuestre que:

$$a^2 y_{xx} = y_{tt} \qquad (\textit{Ecuación de onda}).$$

7. Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y $(x, y) = (r\cos\theta, r\,sen\,\theta)$, demuestre que :

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2 \ .$$

8. Calcular la máxima derivada direccional de la función

$$f(x,y) = G(xy, x\,\mathrm{sen}y) + 4xy^2 \text{ en } (1, \pi),$$

sabiendo que $G_u(\pi,0) = 0$ y $G_v(\pi,0) = 8\pi$ (u y v son primera y segunda variable de G). G diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

9. Dada f diferenciable. Probar que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(3x - y) - f(x + y)$ en el punto(1,1,0) es perpendicular al plano $x + y = 2$.

10. La distribución de presión en una región del plano responde a la función

$P(x,y) = x - y$, donde x e y son las coordenadas de ubicación de un punto en dicho plano. Por otra parte $g(t) = (t + t^4, 3t^4)$, $t\in(0,1)$ describe la trayectoria de una partícula en dicho plano. Exprese en función del tiempo, la presión a que es sometida la partícula en cada punto.¿En qué instante la presión es máxima ?. Si tuviese que hacer el mismo cálculo para diferentes distribuciones de presión pero igual trayectoria de la partícula, ¿podría conseguir una fórmula para la derivada?

11. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{xy}$, determinar $d^2 f$.

12. Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x^2 + y, x^2 - \cos y)$ determinar $d^2 F$ si f es continuamente

diferenciable hasta el orden dos.

13. *a*) Encuentre la mejor aproximación de 2do grado(desarrollo de Taylor) de la función f tal que $f(x, y) = x\,e^{y}$ cerca del punto (2,0) .

b) Use calculadora para determinar un valor aproximado de $f(2.001, 0.001)$. Compare el resultado con $T_2(0.001, 0.001)$.