ANÁLISIS MATEMÁTICO II- CÁLCULO NIVEL III

T.P.Nº5

1. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en P_o :

   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad P_o = (0,0)$

   $(x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

   b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad P_o = (0,0)$

   $$(x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2 sen\ x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

   c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad P_o = (1,0)$

   $(x,y) \mapsto f(x, y) = 8\,x\,y + 9\,x^3$.

2. Determinar el campo de gradiente de las funciones:

   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $(x,y) \mapsto f(x, y) = e^x \cos y + e^y\, sen\, x$

   b) $f: A \to \mathbb{R}$ $\qquad A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0\}$

   $(x,y, z) \mapsto z\, x^y + \ln(x\,y)$

3. Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Probar :

   a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$; *b)* $\nabla(f.\, g) = g\nabla f + f\,\nabla g$.

4. Sea el campo vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable,

   $(x,y, z) \mapsto (F_1(x,y, z), F_2(x,y, z), F_3(x,y, z))$

   - Se define la **divergencia del campo** $\vec{F}$ a la siguiente función :

   div $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

   $$(x,y, z) \mapsto \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}$$

   También suele usarse la notación de operador $\nabla \cdot \vec{F}$

- Se define el **rotor del campo** $\vec{F}$ a la siguiente función :

$$\text{rot}\,\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto \left(\frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial z}, \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y}\right)$$

También suele usarse la notación de operador $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$

a) Si $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z)$, calcular $div\,\vec{F}(0,0,0)$; $rot\,\vec{F}(1,1,1)$

b) Si $\vec{F}(x,y,z) = (xy, xy, z)$, calcular $\nabla \cdot \vec{F}(0,0,0)$; $div\,\vec{F}(1,1,1)$;

$\nabla \times \vec{F}(0,0,0)$; $\nabla \times \vec{F}(1,1,1)$.

5. Se define el laplaciano del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable hasta el orden dos, a la siguiente función :

$$\Delta f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Probar que:

a) $\Delta f = \text{div}(\text{grad}\, f)$ (En notación de operador $\Delta f = \nabla . \nabla f = \nabla^2 f$

b) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$

c) $\Delta(fg) = g\,\Delta f + f\,\Delta g + 2\,\nabla f . \nabla g$

6. Dada

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Estudie la diferenciabilidad de f en (0,0).¿ Es f continua en (1,0) ? ¿Con este resultado puede concluir algo respecto de la diferenciabilidad de f en (1,0) ?. Represente gráficamente en $\mathbb{R}^3$.

7. La condición suficiente para que una función sea diferenciable en un punto puede generalizarse a más de dos variables.

Probar que la función $f(x, y, z) = 4\ Arctg\frac{y}{x} \quad -\pi\ \ ln(x\ y\ z)$. es diferenciable en $P_o = (1, 1, e)$ utilizando dicha condición suficiente.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \quad \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x^2\ sen\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \quad .$$

Pruebe que f es diferenciable en (0,0) ; pero una derivada parcial ***no es continua*** en (0,0).

9. Calcule la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(P_0)$, usando la fórmula para función diferenciable cuando sea posible(en caso positivo, justifique la diferenciabilidad), siendo :

a) $f(x, y) = \cos(xy)$ $\qquad P_0 = \left(\pi, \frac{1}{2}\right) \qquad \vec{v} = (3{,}4)$. ¿Cuál es la máxima derivada direccional de f en P_o y en qué dirección se produce?

b) $f(x, y) = \sqrt{|xy|} + x \qquad P_0 = (0{,}0) \qquad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \qquad P_0 = (-2, 3, 4)$,
$(x, y, z) \mapsto xy - 2yz^2$

en la dirección del vector $\vec{v} = (6, -2,\ 3)$.

10. Para las funciones y P_0 del ejercicio 1,

   a. Estudiar la continuidad en P_0.

   b. Calcular la derivada direccional en P_0 en la dirección $\vec{v} = (1{,}1)$