ANÁLISIS MATEMÁTICO II- CÁLCULO NIVEL III

T.P.Nº3

1) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por :

a) $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

b) $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+|y|}$.

c) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ y \ sen\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases}$.

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \neq -x^2\}$, $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^6+y^3}$.

Estudiar la existencia de los límites repetidos y radiales en el origen.
¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x, y)$?

2) Probar la unicidad del límite. Esto es:

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad P_o \in D'$

$\left(\lim\limits_{P \to P_o} f(P) = L_1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{P \to P_o} f(P) = L_2 \right) \quad \Rightarrow \quad L_1 = L_2$.

3) Probar las propiedades del límite de suma, producto y cociente de funciones dados en clase. (Sug. Ver que puede adaptar la demostración vista para una variable)

4) *a*) Probar la siguiente condición necesaria para la existencia del límite:

_ Cuando existen los " límites repetidos ", condición necesaria para que haya " límite " es que los límites repetidos sean iguales._

b) ¿ La condición es suficiente ?

c) ¿ Qué pasa en el ejercicio 1.*c*) ?

5) Probar que si $F(P) = f(P)\, g(P)$; F, f, g funciones reales; $\lim\limits_{P \to P_o} f(P) = 0$;

g acotada. Entonces $\lim\limits_{P \to P_o} F(P) = 0$.

6) Probar que dada una función $f: D \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$.

$\exists \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = (L_1, L_2, \ldots, L_p)$ sii $\forall i = 1, \ldots, p$ $\exists \lim\limits_{P \to P_0} f_i(P) = L_i$.

7) Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Probar : $\lim\limits_{P \to P_o} f(P) = \vec{0} \iff \lim\limits_{P \to P_o} \| f(P) \| = 0$.

Si $L \neq \vec{0}$ ¿ Es cierto que $\lim\limits_{P \to P_o} f(P) = L \iff \lim\limits_{P \to P_o} \| f(P) \| = \|L\|$?

8) Dadas las funciones:

a) $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2y^2 - x^4}{x^2 + y^2}$$

b) $f: \mathbb{R}^2 - \{(x,y) |\, x = 0\} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2 seny \;\; - |x|}{|x|}$$

c) $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2 seny^2 + y^4 \cos x}{|x| \;\; + y^2}$$

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f) $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x^2y^2 - x^4}{x^2 + y^2}, x^3 \operatorname{sen} y \right)$$

i) Estudiar la existencia del límite doble en el origen.

ii) Estudiar la continuidad de *f* en todo su dominio, en a), b), c), d) y f).

(Sug. Use el ejercicio 9 del TP2 y las propiedades de continuidad que se dieron en clase)

9) Dadas $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ y $\vec{G}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, ambas continuas en P_0 , probar que:

a) $\vec{F} \cdot \vec{G}$ (producto escalar) es una función continua en P_0 .

b) Si $s = 3$, $\vec{F} \times \vec{G}$ (producto vectorial) es una función continua en P_0 .