ANÁLISIS MATEMÁTICO II – CÁLCULO NIVEL III

T.P.Nº 9

1. Sea la ecuación $2x^2y - 2x^3 + xy - y^2 = 0$

a) ¿ Define implícitamente a la función $y = g(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$?.

b) Represente gráficamente el conjunto solución de la ecuación dada. (sug: factorice el primer miembro de la ecuación). Observe si la representación gráfica de la función dada en a) está contenida en su dibujo.

c) ¿Podría extraer del conjunto solución otra función definida implícitamente por la ecuación?

d) Encuentre y´ derivando implícitamente la ecuación.

e) Calcule y´(1) usando d). Interprete este resultado en la representación gráfica hecha en b).

f) ¿Puede trabajar igual para calcular $y'\left(\frac{1}{2}\right)$?.

g) ¿Mediante el Teorema de las Funciones Implícitas pruebe que existe al menos una función definida en un entorno de x=1. Encuentre una.

2. *a*) Probar que la ecuación $e^{(x-z)} + xz - 2z - y^2 + 4 = 0$ define implícitamente a $z(x,y)$ como función diferenciable de x e y en un entorno de (1,2).

b) Calcular la derivada direccional de $z(x,y)$ en el punto (1,2) , en la dirección del vector (-1,1).

3. a) Sea $z=f(x,y)$ función diferenciable definida implícitamente por la ecuación $e^z + x^2z - xy - y + 1 = 0$. Calcular la derivada direccional de z en el punto (0,2) en la dirección del vector (1,3).

b) ¿Cuánto vale la máxima derivada direccional de z en (0,2) y en qué dirección se produce?

4. La ecuación $z\, g(x + y + z) = 0$ define implícitamente a $z = z(x, y)$ como función diferenciable de x e y, en un entorno abierto del punto $P_o = (x_o, y_o)$.

Calcule z_x y z_y en los puntos de ese entorno.

5. $F(xz, \frac{y}{z}) = 0$ define implícitamente a $z = z(x, y)$ como función diferenciable de x e y, en un entorno abierto del punto $P_o = (x_o, y_o)$.

Calcule z_x y z_y en los puntos de ese entorno.

6. Determinar la constante a para que el plano tangente en el punto $(1, a, 1)$ a la superficie de ecuación $z^3 + 4z - x^2 + xy^2 + 2y - 7 = 0$ sea paralelo al plano $7x - 4y + 7z = 0$.

7. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $z^2 + 25 = 2(x^2 + y^2)$, en el punto (4, 3, 5). Demuestre que la superficie dada es tangente en el mismo punto a la definida por la ecuación $5z = x^2 + y^2$.

8. ¿ Son tangentes en (3,6,2) las superficies

   $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 108$ y $xy = 18$?.

9. Hallar el ángulo de intersección de las superficies $x^2 y + z = 3$; $x \ln z - y^2 = -4$ en (-1, 2, 1).

10. Determinar la ecuación de la recta normal a la curva de nivel de $z = x^2 + y^2$ en (1, 2).

11. Determinar un vector unitario en la dirección normal a la superficie de nivel de $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 11$ que pasa por $Q_0(1, 2, 3)$.

   Encontrar un vector unitario cuya dirección sea la de máxima derivada direccional de u en Q_0.

12. ¿En qué puntos de la superficie $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ el plano tangente a la misma es paralelo al plano $2x - 2y + 4z = 1$? Representar gráficamente y escribir la ecuación del plano tangente en uno de esos puntos.

13. Una partícula sigue la trayectoria descripta por $g(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, t)$, $t \in (0,2)$. Su trayectoria se interrumpe por una colisión contra la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. ¿En qué instante, en qué punto y bajo qué ángulo de ataque se produjo la colisión?