

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Notas de clases

Marta Lagarrigue

**Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán**

Notas de Análisis Matemático II

Estas son notas de clases de análisis matemático en varias variables para alumnos de las carreras de matemática y de física de la FaCET de la U.N.T.

En ellas se desarrollan con fundamentos teóricos, los conceptos básicos de: continuidad y diferenciabilidad de funciones reales de varias variables y de campos vectoriales, extremos relativos, integrales múltiples, integrales curvilíneas de funciones reales y de campos vectoriales e integrales de superficie de funciones reales y de campos vectoriales. Los ejercicios y problemas que corresponden a estos contenidos, se proponen en las clases prácticas.

Para los alumnos de la Lic. en Matemática de esta facultad y los del Prof. en Matemática que depende de la Fac. de Filosofía y Letras, la materia se llama “**Análisis Matemático II**” y es de régimen anual. Los alumnos de: Lic. en Física, Profesorado en Física y B.U.F. cursan la misma materia; pero en dos cuatrimestres: en el primero **Cálculo Nivel III**(Cálculo diferencial) y en el segundo **Cálculo Nivel IV**(Cálculo integral).

En todas las carreras, la materia corresponde al 2do año de los respectivos planes de estudio y se presupone que los alumnos conocen y manejan el cálculo diferencial e integral en una variable y los conceptos de geometría y de álgebra lineal de cursos previos.

Marta Lagarrigue.

San Miguel de Tucumán, Julio de 2013

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Cálculo diferencial.

– Relaciones. Funciones. Conceptos topológicos.....	1
– Funciones continuas.....	6
– Límite.	11
– Curva. Recta tangente.	15
– Derivadas parciales.	16
– Derivada direccional.	20
– Funciones diferenciables. Propiedades.	23
– Condición suficiente para la diferenciabilidad.....	29
– Teorema de inversión del orden de derivación.	31
– Diferenciales.	33
– Teorema del Valor Medio del Cálculo diferencial.	35
– Funciones compuestas.....	37
– Teorema de derivación de funciones compuestas.	40
– Diferenciales de orden superior. Desarrollo de Taylor.	41
– Funciones inversas.	43
– Funciones implícitas.	45
– Teorema de la función implícita.	46
– Extremos relativos. Extremos absolutos.	49
– Condición necesaria para la existencia de extremo relativo.....	50
– Condición suficiente para que exista extremo relativo.	52
– Extremos ligados. Multiplicadores de Lagrange.	54

Cálculo integral

– Conjunto acotado en \mathbb{R} . Extremo superior de un cjto de números reales.Principio del supremum. Extremo inferior. Conjunto acotado en \mathbb{R}^n . Rectángulo coordinado. Función acotada.	57
– Definición de integral doble.	60
– Criterio de integrabilidad.	63
– Interpretación geométrica de la integral doble.	66
– Propiedades de las integrales múltiples.	67
– Teorema de Darboux.	70
– Teorema del Valor Medio del Cálculo integral.	71
– Integrales paramétricas.	73
– Regla de Leibnitz.	75

– Cálculo de integrales múltiples mediante integrales simples.....	77
– Cambio de variables en integrales dobles.	81
– Coordenadas polares.	82
– Cambio de variables en integrales triples.	83
– Coordenadas esféricas.	84
– Coordenadas cilíndricas.	85
– Integrales curvilíneas. Longitud de arco de curva.	86
– Integral curvilínea de una función real.	88
– Integral curvilínea de un campo vectorial.....	89
– Teorema de Gauss-Green en el plano.	92
– Independencia del camino de integración.	95
– Formas diferenciales exactas.	98
– Superficie regular. Área de superficie regular.	102
– Integrales de superficie de funciones reales.	105
– Integrales de superficie de campos vectoriales.	106
– Teorema de Gauss-Ostrogradski. (de la divergencia).	108
– Teorema de Stokes. (del rotor).	111

Bibliografía

1. Amázigo-Rubinfeld: **Cálculo avanzado con aplicaciones a la Ingeniería y la Física.**- Ed. Mc.Graw-Hill. 1980.
2. Bartle, Robert G: **Introducción al Análisis Matemático.**Ed. Limusa 1980
3. Spivak, Michael: **Cálculo en Variedades.** Ed. Reverté. S.A. 1979.
4. Williamson-Crowell-Trotter: **Cálculo de Funciones Vectoriales.** Ed. Prentice Hall Internacional. 1973.

Marta Lagarrigue.

San Miguel de Tucumán, Julio de 2013

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

RELACIONES:

Definición:

Sean A y B conjuntos .

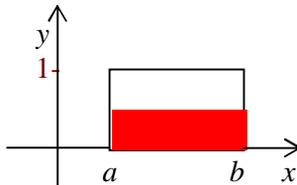
Una relación \mathbf{R} de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

\mathbf{R} relación de A en $B \Leftrightarrow \mathbf{R} \subset A \times B$

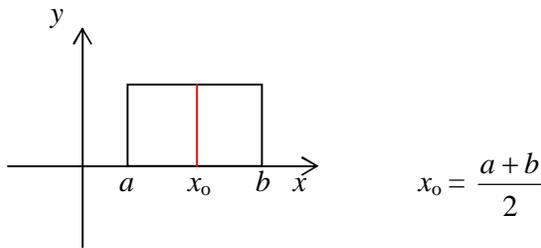
Sean $a \in A$, $b \in B$. Decimos que a está relacionado con b si y sólo si $(a,b) \in \mathbf{R}$,
y escribimos : $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow (a,b) \in \mathbf{R}$.

Ejemplo 1: Sean $a, b \in \mathbb{R} : b > a$

$$A = [a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} ; B = [0,1] ; \mathbf{R} = \{ (x,y) \in A \times B \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \} .$$



Ejemplo 2: $A = [a,b] ; B = [0,1] ; \mathbf{R} = \{ (x,y) \in A \times B \mid x = \frac{a+b}{2} \} .$



Definición :

Se llama dominio de \mathbf{R} al conjunto $Dom(\mathbf{R}) = \{ x \in A \mid \exists y \in B \wedge (x,y) \in \mathbf{R} \} .$

Se llama rango de \mathbf{R} al conjunto $Rang(\mathbf{R}) = \{ y \in B \mid \exists x \in A \wedge (x,y) \in \mathbf{R} \} .$

En el *Ejemplo 1* $Dom(\mathbf{R}) = [a,b]$ y $Rang(\mathbf{R}) = [0, \frac{1}{2}] .$

En el *Ejemplo 2* $Dom(\mathbf{R}) = \{x_0\}$ y $Rang(\mathbf{R}) = [0,1]$

FUNCIÓN:

Definición: Una función f de A en B es una relación $f \subset A \times B$ tal que :

1) $Dom(f) = A$.

2) $(x, y_1) \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Existe un
único

Esto dice:

$$f \subset A \times B \text{ función de } A \text{ en } B \Leftrightarrow \forall x \in A \exists! y \in B: (x, y) \in f.$$

Si f es función de A en B y $(x, y) \in f$, como para cada x de A existe un único y de B , llamamos a y el transformado de x , o el valor de f en x , y escribimos $y = f(x)$.

Entonces: $f \subset A \times B$ función de A en $B \Leftrightarrow \forall x \in A \exists! y \in B: y = f(x)$.

La notación para funciones es la siguiente: $f: A \rightarrow B$
 $x \mapsto y = f(x)$.

Observación: Si dos funciones tienen distinto dominio son distintas, aún cuando los transformados tengan la misma forma.

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = x + 1$ $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto g(x) = x + 1$. ¡ Dibujar!

Las funciones que vamos a estudiar en este curso serán del tipo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y también $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

El conjunto \mathbb{R}^n es $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i = 1, 2, \dots, n \ x_i \in \mathbb{R}\}$.

A cada elemento de \mathbb{R}^n le llamamos un punto de \mathbb{R}^n y es una n -upla de números reales que denotamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Los números reales x_i se llaman las coordenadas del punto \mathbf{x} de \mathbb{R}^n .

En particular para los elementos de \mathbb{R}^2 y de \mathbb{R}^3 vamos a usar la notación clásica.

Así $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

DISTANCIA EN \mathbb{R}^n

La distancia usual entre puntos de \mathbb{R}^n se define así: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

Así la distancia en \mathbb{R}^n es una función $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

El par (\mathbb{R}^n, d) formado por el conjunto \mathbb{R}^n y la función d se llama espacio euclidiano de dimensión n .
 $E^n = (\mathbb{R}^n, d)$.

El espacio euclidiano de dimensión 1, E^1 , es la recta real con la distancia usual.

$$d(x,y) = |x - y|.$$

El espacio euclidiano de dimensión 2 es el plano real con la distancia usual.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \text{ donde } P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

CONCEPTOS TOPOLÓGICOS.

Sea $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Definición de BOLA

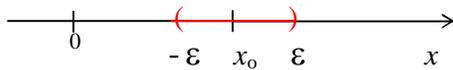
Se llama bola de centro P_0 y radio ε , al subconjunto de \mathbb{R}^n definido así:

$$B_\varepsilon(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, P_0) < \varepsilon\}.$$

En el espacio E^1 (la recta real), una bola es un intervalo abierto. En efecto:

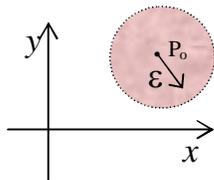
Si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$



En E^2 , el plano real, una bola es un círculo sin la circunferencia.

$$P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, B_\varepsilon(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}.$$



Definición de Conjunto Abierto

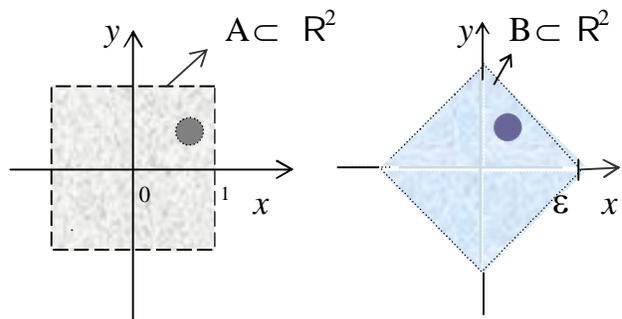
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es un cjo abierto si A es vacío o si para todo pto. P de A existe una bola con centro en P , contenida en A .

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall P \in A \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(P) \subset A$$

Ejemplos:

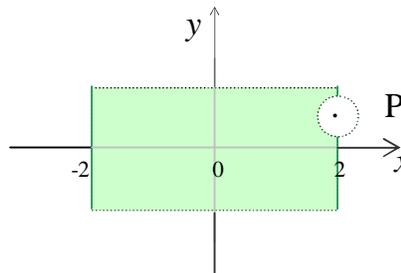
1. El cjo $\phi \subset \mathbb{R}^n$ es abierto.
2. Una bola en \mathbb{R}^n es un cjo abierto.
3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$.
4. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$.

A y B son cjos abiertos en \mathbb{R}^2 .



5. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2, |y| < 1\}$.

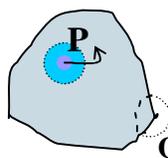
C no es abierto, $\exists P \in C$ tal que toda Bola con centro en P contiene ptos que no pertenecen a C.



Definición de Punto interior.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $P \in A$. P es pto interior del cjto A, si existe una bola con centro en P, contenida en A.

P punto interior de A $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(P) \subset A$



P es pto interior de A.

Q no es pto interior de A.

El conjunto de ptos interiores de A se llama el interior de A y se denota $\overset{\circ}{A}$.

$\overset{\circ}{A}$ es un cjto abierto.

De la definición de cjto abierto y de la de interior de un cjto, se sigue que un cjto es abierto si y sólo si coincide con su interior.

Definición de Conjunto cerrado.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es cerrado $\Leftrightarrow cA$ es un cjto abierto.

cA se llama el complemento de A. Es el cjto de ptos de \mathbb{R}^n que no pertenecen a A.

$cA = \{P \in \mathbb{R}^n \mid P \notin A\}$.

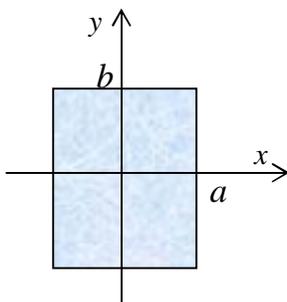
Ejemplos :

1. El cjto \emptyset y \mathbb{R}^n son cjtos cerrados.

2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$ $a, b \in \mathbb{R}$

A es un cjto cerrado en \mathbb{R}^2 porque cA es abierto.

$cA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > a, |y| > b\}$



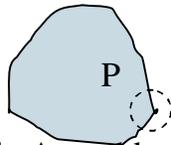
Definición de Frontera :

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.

$$P \in \mathbb{R}^n \text{ es un punto frontera de } A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(P) \cap cA \neq \emptyset$$

Esto es: P es pto frontera de A sii toda bola con centro en P tiene ptos de A y ptos de cA .

La frontera de A es el cjto de los ptos frontera de A y se denota $Front(A)$ o también con el símbolo ∂A .



P es pto frontera de A .

La frontera de A es el borde.

Se puede probar que un conjunto es cerrado sii contiene a su frontera.

Proposición: $A \text{ cerrado} \Leftrightarrow \partial A \subset A$.

Definición de Entorno de un punto:

Sea $P \in \mathbb{R}^n$ y $N \subset \mathbb{R}^n$.

Decimos que N es entorno del pto P , si N contiene una bola con centro P .

$$N \text{ entorno de } P \Leftrightarrow \exists B_\varepsilon(P) : B_\varepsilon(P) \subset N$$

Observar que un cjto abierto es entorno de cada uno de sus ptos.

Toda bola con centro P es entorno de P ; pero no todo entorno de P es una bola.

Definición de pto de acumulación:

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $P \in \mathbb{R}^n$.

P es pto de acumulación de A si y sólo si toda bola con centro P tiene ptos de A , distintos de P .

Llamamos bola reducida a $B_\varepsilon^*(P) = B_\varepsilon(P) - \{P\}$. Entonces :

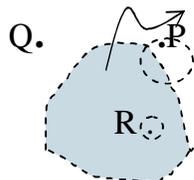
$$P \text{ es p,ac de } A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon^*(P) \cap A \neq \emptyset$$

Un pto de acumulación de A puede o no, pertenecer a A .

Ejemplo en E^2 :

B

$$A = B \cup \{Q\}$$



P es pto de acumulación y $P \notin A$

R es pto de acumulación y $R \in A$

Q no es pto de acumulación y $Q \in A$

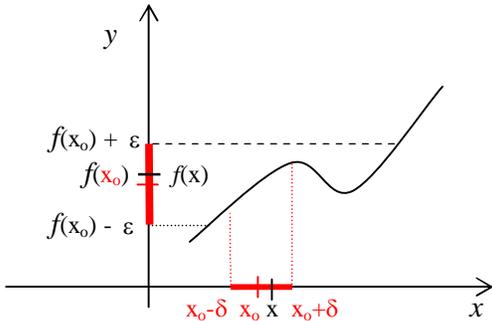
FUNCIONES CONTINUAS.

I) Consideremos primero, el caso de funciones reales de una variable.

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.
 $x \mapsto f(x)$

Del curso de A.M.I. sabemos que, por definición, f es continua en x_0 si

$\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$), $\exists \delta > 0$ ($\delta \in \mathbb{R}$) tal que: si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



Observemos que: $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$, significa que $x \in (B_\delta(x_0) \cap A)$.

y $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ significa que $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$. Por lo tanto, podemos definir continuidad en un pto así:

Definición:

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$.
 $x \mapsto f(x)$

$$f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0: (x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)))$$

Esto dice que una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A \subset \mathbb{R}$ si para todo intervalo abierto de centro $f(x_0)$ existe un intervalo abierto de centro x_0 cuya imagen está contenida en el de centro $f(x_0)$.

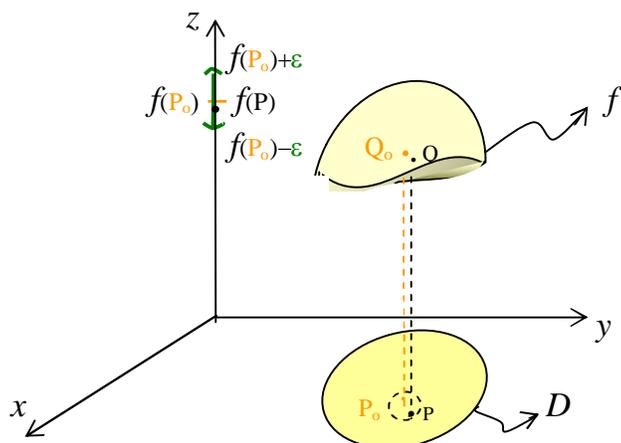
II) Nos interesa, ahora, definir continuidad para funciones de dos variables.

Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ y $P_0 \in D$.
 $P \mapsto f(P)$

Por definición, f es continua en P_0 si para todo ε real positivo existe un δ real positivo tal que para cada $P \in (B_\delta(P_0) \cap D)$ se cumple $f(P) \in B_\varepsilon(f(P_0))$.

En símbolos:

$$f \text{ es continua en } P_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0: (P \in (B_\delta(P_0) \cap D) \Rightarrow f(P) \in B_\varepsilon(f(P_0)))$$



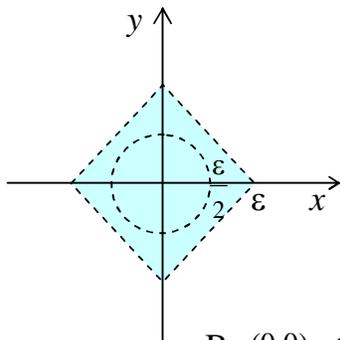
La función f del dibujo es continua en P_0 . Para cada intervalo real $(f(P_0) - \epsilon, f(P_0) + \epsilon)$ se puede determinar un círculo de centro P_0 y radio δ de modo que si un punto P pertenece al círculo, su imagen $f(P)$ pertenece al intervalo $(f(P_0) - \epsilon, f(P_0) + \epsilon)$.

Definición:

f es continua si es continua en cada punto de su dominio

Antes de dar un ejemplo de función continua, observemos lo siguiente:

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < \epsilon\}$. A es el cjto de pto del plano que pertenecen al cuadrado del dibujo:

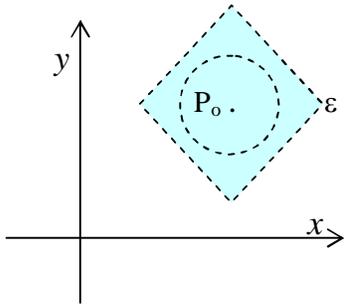


$B_{\frac{\epsilon}{2}}(0,0) \subset A$. En efecto:

$$(x,y) \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(0,0) \Rightarrow x^2 + y^2 < \frac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ |y| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |x| + |y| < \epsilon \Rightarrow (x,y) \in A.$$

Esto dice que si un pto pertenece a la bola de centro en el origen y radio $\frac{\epsilon}{2}$ entonces pertenece al cuadrado A, como se ve en dibujo.

En el caso en que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon\}$, entonces $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0, y_0) \subset A$



$$(x,y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0, y_0) \Rightarrow |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon$$

Veamos ahora, un ejemplo que muestra cómo probar que una función es continua en un punto.

Ejemplo 1:

Probar que la función f es continua en el origen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

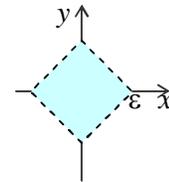
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $(x,y) \in B_{\delta}(0,0) \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

Si $(x,y) \neq (0,0)$, miremos $|f(x,y) - 0|$.

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2 + xy}{|x| + |y|} \right| \leq \frac{x^2}{|x|} + \frac{|x| \cdot |y|}{|x|} \leq |x| + |y|. \quad (1)$$

Sabemos que los pts (x,y) que verifican $|x| + |y| < \varepsilon$ están en el cuadrado



Entonces basta elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para que: $(x,y) \in B_{\delta=\varepsilon/2}(0,0) \Rightarrow |x| + |y| < \varepsilon$

Teniendo en cuenta (1), afirmamos:

$$(x,y) \in B_{\delta=\varepsilon/2}(0,0), (x \neq 0) \Rightarrow |f(x,y) - 0| \leq |x| + |y| < \varepsilon$$

$$(x,y) \in B_{\delta=\varepsilon/2}(0,0), (x=0) \Rightarrow |f(x,y) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

Hemos probado $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} : (x,y) \in B_{\delta=\varepsilon/2}(0,0) \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

Esto dice que f es continua en $(0,0)$, como queríamos probar. ■

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo2:

Probar que la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$

Tenemos que probar que $\forall P_0 \in \mathbb{R}^2$ f es continua en P_0 .

Supongamos primero que $P_0 = (0,0)$.

Sea $\varepsilon > 0$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |x^2 + y^2 - 0| = x^2 + y^2.$$

Si elegimos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, tenemos: $(x,y) \in B_\delta(0,0) \Rightarrow |f(x,y) - 0| = x^2 + y^2 < \varepsilon$.

Por lo tanto f es continua en el origen. ■

Supongamos ahora, $P_0 = (x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Sea $\varepsilon > 0$.

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |x^2 + y^2 - (x_0^2 + y_0^2)| \leq |x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2| \quad (*)$$

Queremos determinar el radio δ de una bola de centro P_0 , $B_\delta(x_0,y_0)$, de manera que para los puntos $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$ sea $|x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2| < \varepsilon$.

Miremos pto P tales que $|x-x_0| < 1 \wedge |y-y_0| < 1$

$$\sqrt{\quad} \quad |x-x_0| < 1$$

$$|x^2 - x_0^2| = |x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + 2xx_0 - 2x_0^2| \leq |x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0| < (1 + 2|x_0|) \cdot |x - x_0|$$

$$|x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2| \leq (1 + 2|x_0|) \cdot |x - x_0| + (1 + 2|y_0|) \cdot |y - y_0| \leq K(|x - x_0| + |y - y_0|) \quad (**)$$

Donde $K = \max. \{ (1 + 2|x_0|), (1 + 2|y_0|) \}$.

Si elegimos $\delta = \min \{ 1, \frac{\varepsilon}{2K} \}$, $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{K}$

entonces de (*) y (**) concluimos:

$(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Y esto dice f continua en P_0 . ■

III) Consideremos funciones vectoriales.

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $P \in D \subset \mathbb{R}^n \therefore P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\forall i = 1, 2, \dots, m$. $f_i: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto f(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$ $P \mapsto f_i(P)$

Las fciones f_i se llaman fciones coordenadas. La fción f transforma pto de \mathbb{R}^n (que podemos identificar con vectores de \mathbb{R}^n) en vectores de \mathbb{R}^m .

Para este tipo de fciones interesa representar, cuando es posible, la imagen del dominio. $f(D) = \{ f(P) \in \mathbb{R}^m \mid P \in D \}$

Ejemplo3:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto f(t) = (t+1, t)$$

los valores de f son pto de \mathbb{R}^2 cuyas coordenadas son fciones de la variable t .

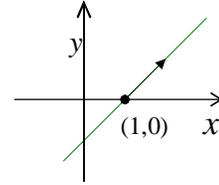
$$(1) \begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \\ \hline x - y = 1$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y = 1 \}.$$

La representación gráfica de $f(\mathbb{R})$, es una recta en \mathbb{R}^2 .

Las ecuaciones (1) se llaman las ecuaciones paramétricas de la recta.

La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y) = (1,0) + t(1,1) \quad t \in \mathbb{R}$



Ejemplo 4:

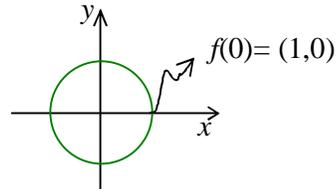
$$f: [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto f(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad . \quad f([0,2\pi]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



La gráfica de $f([0,2\pi])$ es una circunferencia.

Ejemplo 5:

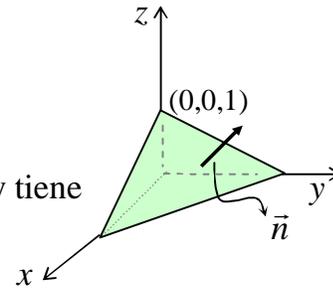
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \mapsto f(u,v) = (u+v, u-v, 1-u)$$

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = 1 - u \end{cases} \Rightarrow f(\mathbb{R}^2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 2\} .$$

La gráfica de $f(\mathbb{R}^2)$ es un plano que pasa por el pto $(0,0,1)$ y tiene normal $\vec{n} = (1,1,2)$

La ecuación vectorial del plano es $(1,1,2) \cdot (x, y, z-1) = 0$

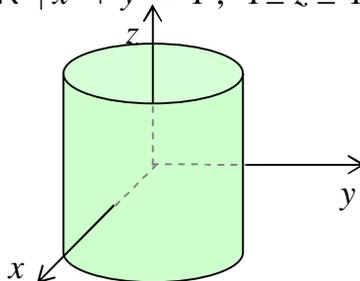


Ejemplo 6:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad D = [0,2\pi] \times [-1,1]$$

$$(u,v) \mapsto f(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$f(D) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$. La gráfica de $f(D)$ es una porción de cilindro.



Definición:

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad P \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \therefore P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\forall i = 1, 2, \dots, m. \quad f_i: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \mapsto f(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)) \quad P \mapsto f_i(P)$$

f es continua en $P_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (P \in (B_\delta(P_0) \cap D) \Rightarrow f(P) \in B_\varepsilon(f(P_0)))$

Se puede probar que f es continua en P_0 si y sólo si cada una de las funciones coordenadas f_i es continua en P_0 .

LÍMITE.

Sean $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $P_0 \in D'$. (D' conjunto de puntos de acumulación de D)
 $P \mapsto f(P)$
y sea $L \in \mathbb{R}$.

Puede ocurrir que $P_0 \notin D$. Aún cdo la función f no esté definida en P_0 , como P_0 es pto de acumulación del dominio, tiene sentido averiguar qué pasa con los valores $f(P)$ para pto P del dominio de f , "próximos a P_0 ", esto es, pertenecientes a una bola de centro P_0 y radio δ tan pequeño como se quiera.

Si para estos pto los valores de la función son próximos al número real L , decimos que *el límite de $f(P)$ cuando P tiende a P_0 es L* y escribimos $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$.

Definición:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: (P \in (B_\delta^*(P_0) \cap D) \Rightarrow f(P) \in B_\varepsilon(L))$$

Si $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P_0 \in D' \subset \mathbb{R}^n$, y $L = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$
 $P \mapsto f(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$

vale la misma definición y se puede probar que $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$ sii $\forall i = 1, \dots, m$
 $\lim_{P \rightarrow P_0} f_i(P) = L_i$

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{t^2}{2} \right).$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t}{2}, \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t}{2}, \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2}{2} \right) = (1, 1, 2)$$

De las definiciones de límite y continuidad en un pto, se sigue que si P_0 es un pto de acumulación de D que pertenece a D entonces vale la siguiente proposición:

Proposición:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $P_0 \in D' \cap D$.
 $P \mapsto f(P)$

$$f \text{ es continua en } P_0 \Leftrightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

Observación:

Si P_0 es un pto del cjo que no es pto acumulación, se llama pto aislado.

Si P_0 pertenece al dominio D de f y es un pto aislado de D , entonces f es continua en P_0 . Por lo tanto: **Toda función es continua en un pto aislado de su dominio, aún cuando no tenga sentido el concepto de límite ya que P_0 no es pto de acumulación.**

Veamos un ejemplo de límite.

Ejemplo 1: Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

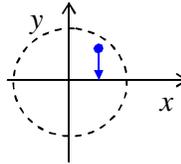
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2}.$$

$(0,0) \notin D$, luego f no puede ser continua en $(0,0)$; pero $(0,0)$ es pto de acumulación de D . Entonces veamos qué pasa con $f(x,y)$ cuando (x,y) está en D y tiende a $(0,0)$.

Límites repetidos

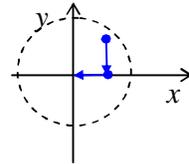
Miremos puntos tales que $x \neq 0$; $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 \cdot 0}{x^2} = 0.$$



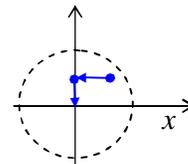
Nos aproximamos ahora al origen a lo largo del eje x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$



Ahora vamos a aproximarnos al origen, calculando $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right)$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \operatorname{sen} y}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

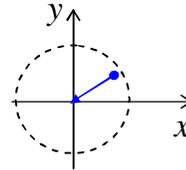


Los límites: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right)$ y $\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right)$ se llaman "límites repetidos".

En este ejemplo, ambos límites repetidos son iguales a cero. Esto dice que si existe límite L (también llamado límite doble) éste debe ser igual a cero.

Limites radiales:

Vamos a aproximarnos al origen siguiendo otro camino. Miramos pts próximos al origen, pertenecientes a una recta que pase por el origen $y = mx$.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} mx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} mx}{x^2 (1 + m^2)} = 0.$$

Para cada m los límites $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, mx)$ se llaman límites radiales.

En este ejemplo vemos que existen los límites repetidos y los límites radiales y todos son iguales a cero. Por lo tanto, si existe el límite doble, éste debe ser igual a cero. Probaremos que, en efecto, el límite doble L existe y vale cero.

Sea $\varepsilon > 0$. $y (x, y) \neq (0, 0)$

$$|f(x, y) - L| = \left| \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2 |y|}{x^2} = |y| \leq |x| + |y|.$$

$$\text{Si elegimos } \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, y) \in B_{\delta=\varepsilon/2}(0, 0), (x \neq 0) \Rightarrow |f(x, y) - 0| \leq |x| + |y| < \varepsilon.$$

$$(x, y) \in B_{\delta=\varepsilon/2}(0, 0), (x = 0) \Rightarrow |f(x, y) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

Hemos probado $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} : (x, y) \in B_{\delta=\varepsilon/2}(0, 0) \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \varepsilon$.

Esto dice que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, como queríamos probar.

En el siguiente ejemplo veremos una función que no tiene límite en el origen.

Ejemplo 2: Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

¡Evidente!

Los límites repetidos existen y ambos son iguales a cero.

Nos aproximemos al origen a lo largo de la recta $y = x$. Esto es, miremos el límite

$$\text{radial } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Como los límites repetidos son 0 y un límite radial es distinto de 0, no puede existir el límite doble.

En pts próximos a $(0, 0)$, el valor de $f(x, y)$ tiende a valores distintos según el camino que sigamos para aproximarnos al origen.

Por lo tanto $f(x,y)$ no tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

En consecuencia la función f no puede ser continua en el origen.

PROPIEDADES:

Proposición.

Sean: $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in D'$ y $L, M \in \mathbb{R}$ tales que

$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$ y $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = M$. Entonces valen : a) , b) y c).

a) $\lim_{P \rightarrow P_0} \{f(P) + g(P)\} = L + M$.

Cuando los sumandos tienen límite, el límite de la suma es la suma de los límites.

b) $\lim_{P \rightarrow P_0} \{f(P) \cdot g(P)\} = L \cdot M$.

Cuando los factores tienen límite, el límite del producto es el producto de los límites.

c) $(M \neq 0 \wedge \forall P \in D \quad g(P) \neq 0) \Rightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{L}{M}$.

La demostración de la proposición , se deja como ejercicio.

Para las funciones continuas valen las mismas propiedades:

a) *La suma de funciones continuas es una función continua.*

b) *El producto de funciones continuas es una función continua.*

c) *Si la función del denominador no se anula en ningún pto, el cociente de funciones continuas es una función continua.*

DERIVADA .

CURVA. RECTA TANGENTE A UNA CURVA.

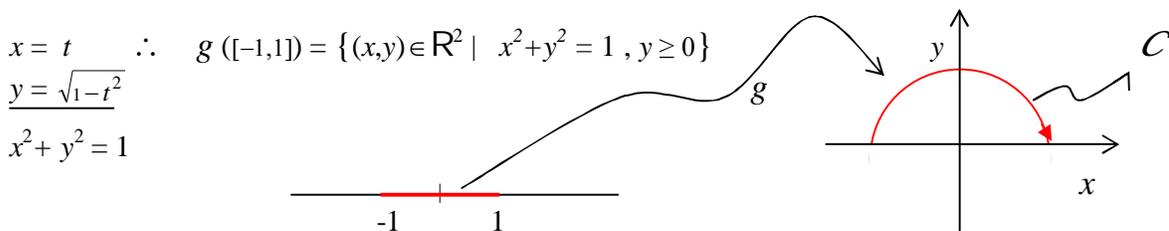
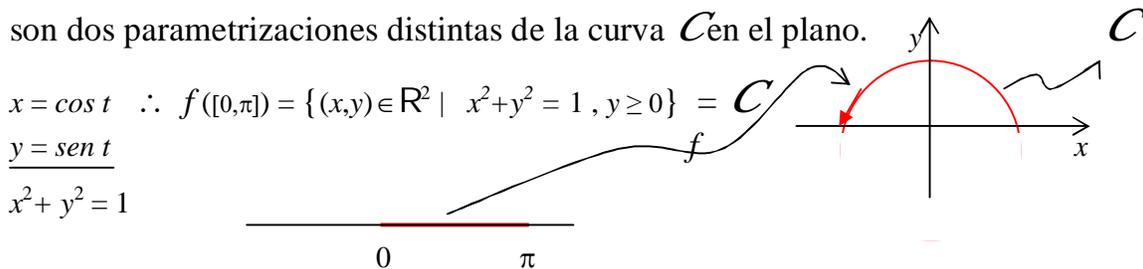
Definición

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Se llama curva \mathcal{C} en \mathbb{R}^n al subconjunto $f([a,b])$ de \mathbb{R}^n ,
 $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ imagen por f de $[a,b]$.

La función continua f se llama una parametrización de la curva \mathcal{C}

Ejemplo: $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto f(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \mapsto g(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$

son dos parametrizaciones distintas de la curva \mathcal{C} en el plano.



Las parametrizaciones f y g describen la misma curva; pero al crecer el parámetro la recorren en distinto sentido. Después veremos que estas parametrizaciones no son equivalentes.

Definición

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$. Se llama derivada de f en t_0 al siguiente

límite, cuando existe. Y se denota $f'(t_0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0). \quad \text{Si } h = t - t_0 \text{ también podemos escribir,}$$

cuando existe el límite:

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Por propiedades del límite se puede probar que $f'(t_0) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0), \dots, x'_n(t_0))$.

En efecto.
$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(x_1(t), \dots, x_n(t)) - (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))}{t - t_0}$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t_0+h) - x_1(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_n(t_0+h) - x_n(t_0)}{h} \right) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0), \dots, x'_n(t_0)).$$

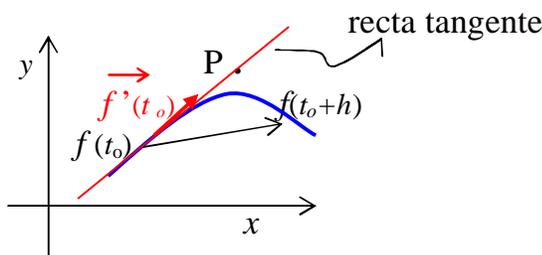
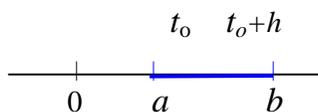
Si $\forall t \in (a,b)$ existe $f'(t)$, la función

$f' : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$. se llama la derivada de f y se denota f' o también $\frac{df}{dt}$.

Ejemplo : $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $t \mapsto (t^2, t^3)$ $f' : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ $t \mapsto (2t, 3t^2)$.

Interpretación geométrica

Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua y $\exists f'(t_0)$.



En el límite, el sentido del vector $\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ no depende del signo de h . ¿Por qué?

Si $\vec{f}'(t_0) \neq (0,0)$ se llama un vector tangente .

La ecuación de la recta tangente a la curva $C = f([a,b])$ en $f(t_0)$ es :

$P = f(t_0) + \lambda \vec{f}'(t_0)$

Donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un pto genérico de la recta tangente a C en $f(t_0)$.

Si f es una función continua de $[a, b]$ en \mathbb{R}^3 , las coordenadas de P son (x, y, z) . Y si se trata de una curva en \mathbb{R}^n , las coordenadas del pto genérico de la recta tangente son (x_1, \dots, x_n) .

Ejemplo: Determinar la recta tangente a la la curva $f(t) = (t^2, t^3)$ en el pto $(1,1)$.

$\begin{cases} t^2 = 1 \\ t^3 = 1 \end{cases}$. Entonces $t_0 = 1$. $\therefore \vec{f}'(1) = (2,3)$ y la ecuación de la recta tangente a la curva en $(1,1)$ es: $(x,y) = (1,1) + \lambda (2,3), \lambda \in \mathbb{R}$ ¿Cuál es la pendiente de esta recta en \mathbb{R}^2 ?

DERIVADAS PARCIALES :

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$ y $P_0 = (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$.

Vamos a definir el concepto de derivada parcial con respecto a x .

Como P_0 es pto interior del dominio, existe una bola $B_\delta(P_0) \subset A$.

Sea entonces $P = (x_0 + h, y_0) \in B_\delta(P_0) \subset A$ y $h \neq 0$

Formemos el cociente $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$.

Definición:

Si existe el siguiente límite se llama derivada parcial de f con respecto a x en P_0 y se denota $f_x(P_0)$.

$$f_x(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Otras notaciones son: $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0}$, $z_x(P_0)$, $D_1 f(P_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

De igual manera se define la derivada parcial con respecto a y . Sea $k \neq 0$

$$f_y(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Ejemplo: Calcular $f_x(P_0)$ si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x_0 + h)^2 + y_0^2] - [x_0^2 + y_0^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0. \end{aligned}$$

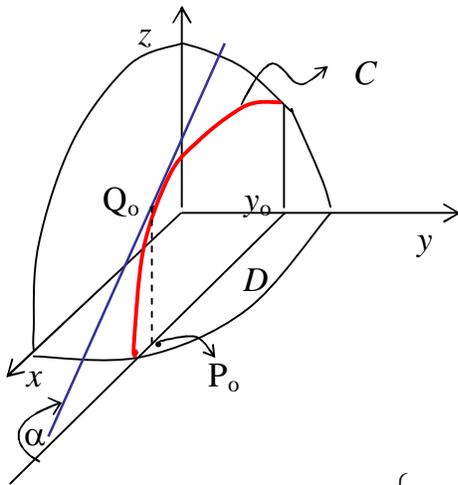
$$\therefore f_x(x_0, y_0) = 2x_0.$$

Observemos que si en la función f tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$, consideramos $y = y_0$ constante y derivamos como si fuera función de la única variable x :

$$\varphi(x) = f(x, y_0) = x^2 + y_0^2, \quad \text{obtenemos } \varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 2x_0.$$

Interpretación geométrica:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $P_0 = (x_0, y_0) \in D$. Supongamos que existe $f_x(P_0)$ y que la gráfica de f sea una superficie de ecuación $z = f(x, y)$.



Llamemos C a la curva intersección de la superficie con el plano de ecuación $y = y_0$ y Q_0 al punto de coordenadas $(x_0, y_0, f(P_0))$

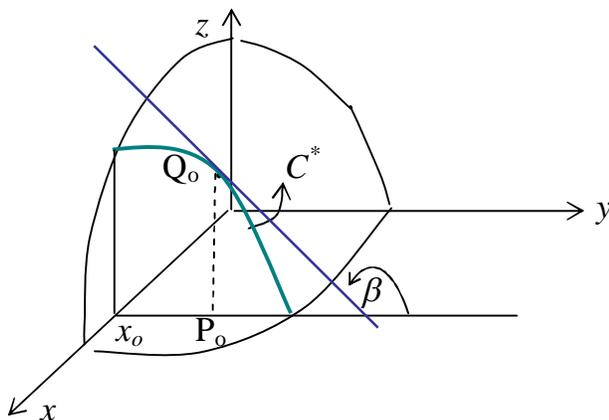
$$C \begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

La ecuación de la curva C en el plano de ecuación $y = y_0$ es $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$.

Como hemos supuesto que existe $f_x(P_0)$, de acuerdo a la definición tenemos:

$$f_x(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(x_0) = \text{tg} \alpha.$$

Hemos probado que $f_x(P_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C en Q_0 , es decir la tangente trigonométrica del ángulo α que forma esa recta tangente con la dirección positiva del eje x .



De igual manera se prueba que $f_y(P_0) = \text{tg} \beta$ donde β es el ángulo que forma la recta tangente a la curva C^* en Q_0 , con la dirección positiva del eje y .

La demostración se deja como ejercicio.

En general, si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $P_o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial f(P_o)}{\partial x_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^o, \dots, x_i^o + h_i, \dots, x_n^o) - f(x_1^o, \dots, x_i^o, \dots, x_n^o)}{h_i}.$$

Del curso de Análisis Matemático I sabemos que si una función real de una variable es derivable en x_o , entonces la función es continua en x_o . Esto es: *la existencia de derivada en un punto asegura la continuidad en ese punto*.

En el siguiente ejemplo veremos que para funciones de varias variables, *la existencia de las derivadas parciales en un punto no es condición suficiente para la continuidad en el punto*.

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

f no es continua en el origen; pero existen las derivadas parciales en $(0,0)$ y ambas valen 0.

En efecto, $\lim_{x \mapsto 0} f(x, mx) = \lim_{x \mapsto 0} \frac{x}{mx} = \frac{1}{m}$. Esto dice que a pesar de existir los límites radiales, son distintos, luego la función no puede ser continua el origen.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 \quad \therefore \quad f_x(0,0) = 0.$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0 \quad \therefore \quad f_y(0,0) = 0.$$

Ejercicio:

Estudiar la existencia de las derivadas parciales de la función f .

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad \text{Si } (x_o, y_o) \neq (0,0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x_o + h)^2 + y_o^2} - \sqrt{x_o^2 + y_o^2}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_o + h)^2 + y_o^2 - (x_o^2 + y_o^2)}{h(\sqrt{(x_o + h)^2 + y_o^2} + \sqrt{x_o^2 + y_o^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_o h + h^2}{h(\sqrt{(x_o + h)^2 + y_o^2} + \sqrt{x_o^2 + y_o^2})} = \frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}$$

$$\therefore \text{ Si } (x_o, y_o) \neq (0,0) \quad f_x(x_o, y_o) = \frac{x_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}, \quad \text{y} \quad f_y(x_o, y_o) = \frac{y_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}$$

Veamos que no existen f_x ni f_y en $(0,0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \stackrel{?}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} \stackrel{?}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{no existe límite, pues:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \quad ; \quad \text{pero} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

DERIVADA DIRECCIONAL

El concepto de derivada direccional es una ampliación del de derivada parcial.

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in D^\circ$ y sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario esto es: $\|\vec{u}\| = 1$.

Se define $D_{\vec{u}}f(P_0)$, la derivada direccional de f en P_0 en la dirección de \vec{u} , así:

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(P_0) \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t}} \quad \text{cuando el límite existe.}$$

La derivada direccional en la dirección de cualquier vector $\vec{v} \neq (0,0)$ se define como

$$D_{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}f(P_0).$$

La derivada direccional mide la rapidez de cambio de $f(P)$ en la dirección dada \vec{u} .

Ejemplo: Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, calcular la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Consideremos Iro el caso $P_0 = (x_0, y_0) \neq (0,0)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(x_0 + tu_1)^2 + (y_0 + tu_2)^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{t} = \frac{x_0 u_1 + y_0 u_2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Habíamos visto que si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ $f_x(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ y $f_y(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$.

Entonces, en este caso

$$D_{\vec{u}}f(P_0) = f_x(x_0, y_0) u_1 + f_y(x_0, y_0) u_2 = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot \vec{u}$$

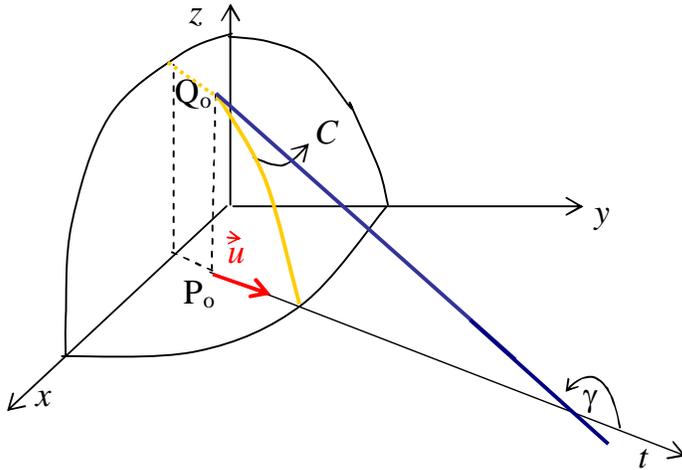
Ahora si $P_0 = (0,0)$:

Por lo tanto $D_{\vec{u}}f(P_0) = 1$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(tu_1)^2 + (tu_2)^2} - 0}{t} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$$

Observemos que no existen las derivadas parciales en $(0,0)$.

Interpretación geométrica de la derivada direccional



Supongamos que exista $D_{\vec{u}}f(P_0)$ y que la gráfica de f sea la de una superficie de ecuación $z = f(x, y)$.

$$\text{La curva } C \begin{cases} z = f(P) \\ P = P_0 + t \vec{u} \end{cases} \quad t \geq 0$$

es la intersección de la superficie con el semiplano vertical que contiene a la semirrecta de origen P_0 y dirección \vec{u} .

Si en el plano vertical de ecuación $P = P_0 + t \vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, fijamos un sistema de coordenadas con origen en P_0 y direcciones: la del eje z y la del vector \vec{u} , la ecuación de la curva C es:

$$z = f(P_0 + t \vec{u}) = \varphi(t) \quad ; \text{ con } t \geq 0.$$

Como hemos supuesto que existe $D_{\vec{u}}f(P_0)$, podemos escribir:

$$D_{\vec{u}}f(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'_+(0) = \text{tag } \gamma$$

$\therefore D_{\vec{u}}f(P_0) = \text{tag } \gamma$. Donde γ es el ángulo que forma la semirrecta tangente a la curva C en el punto Q_0 , con la semirrecta de origen P_0 y dirección \vec{u} .

En general, si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ vector unitario.

Se define $D_{\vec{u}}f(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t}$ cuando existe el límite.

La derivada direccional mide la rapidez de cambio de la función en la dirección del vector \vec{u}

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciales en D^o quedan definidas las funciones:

$$f_x: D^o \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f_y: D^o \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$P \mapsto f_x(P) \qquad \qquad P \mapsto f_y(P)$$

Si f_x tiene derivadas parciales en $P \in D^o$, se denota:

$$\frac{\partial f_x(P)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} = f_{xx}(P) \quad ; \quad \frac{\partial f_x(P)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y \partial x} = f_{xy}(P)$$

Si f_y tiene derivadas parciales en $P \in D^o$, se denota:

$$\frac{\partial f_y(P)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} = f_{yx}(P) \quad ; \quad \frac{\partial f_y(P)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} = f_{yy}(P).$$

Se puede probar que si f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} existen en una bola y f_{xy} , f_{yx} son continuas en P_0 , entonces $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$.

Este resultado se conoce con el nombre de *Teorema de inversión del orden de derivación* y lo demostraremos más adelante.

FUNCIONES DIFERENCIABLES

Primero vamos a considerar funciones $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Para funciones de una variable, la existencia de la derivada en un punto asegura la continuidad de la función en ese punto.

Entonces, en el caso de funciones de más de una variable, podríamos preguntarnos si la existencia de las derivadas parciales en un punto asegura la continuidad en el mismo...La respuesta es negativa como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

La función no es continua en el origen ; pero existen las derivadas parciales en el origen.

Vamos a definir función diferenciable en un punto de manera que implique para la función mayores exigencias que la existencia de las derivadas parciales y garantice la continuidad de la función en el punto.

Definición:

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. $P_0 = (x_0, y_0) \in D^o$; $\Delta z = \Delta f(P_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$.
 $P \mapsto z = f(P)$

def

f es diferenciable en $P_0 \Leftrightarrow \exists B_\delta(P_0) \subset D: \forall P = (x_0 + h, y_0 + k) \in B_\delta(P_0)$

$\Delta z = a h + b k + \omega(h, k)$.

Con a y b constantes y ω tal que $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$

Ejemplo:

La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Dem.

$$\begin{aligned} \Delta f(P_0) &= (x_0+h)^2 + (y_0+k)^2 - (x_0^2 + y_0^2) = 2 x_0 h + 2 y_0 k + (h^2 + k^2) \\ &= a h + b k + \omega(h, k). \end{aligned}$$

Donde $a = 2 x_0$; $b = 2 y_0$; $\omega(h, k) = h^2 + k^2$.

¡ Probar!

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 .$$

$\therefore f$ es diferenciable en (x_0, y_0) .

Vamos a ver ahora, condiciones necesarias para que una función sea diferenciable; o sea propiedades de las funciones diferenciables.

Propiedades de las funciones diferenciables.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. $P_0 = (x_0, y_0) \in D^\circ$.

$$f \text{ diferenciable en } P_0 \Rightarrow \begin{cases} 1) f \text{ es continua en } P_0 . \\ 2) \text{ Existen ambas derivadas parciales de } f \text{ en } P_0 . \\ 3) \text{ Existen las derivadas direccionales de } f \text{ en cualquier dirección en } P_0 . \end{cases}$$

Demostración:

Primero probaremos: $f \text{ diferenciable en } P_0 \Rightarrow f \text{ es continua en } P_0$.

Supongamos que f sea diferenciable en P_0 . Tenemos que probar :

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \quad \text{o lo que es lo mismo :} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0)] = 0$$

$$\lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) - f(P_0)] = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f((x_0 + h, y_0 + k)) - f(x_0, y_0)]$$

Como f es diferenciable en P_0 , podemos escribir:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = a h + b k + \omega(h,k); \text{ y como :}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} ah = 0 \quad ; \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} bk = 0$$

$$\omega(h,k) = \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \omega(h,k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)] = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} ah + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} bk + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \omega(h,k)$$

Esto dice que f es continua en P_0 . ■

Podemos decir que si f no es continua en P_0 , f no es diferenciable en P_0 , o sea que la continuidad es condición necesaria para la diferenciability.

Probemos ahora : f diferenciable en $P_0 \Rightarrow \exists f_x(P_0), f_y(P_0)$.

Sea f diferenciable en P_0 .

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{a h + \omega(h,0)}{h} = a + \frac{\omega(h,0)}{h}.$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h,0)}{|h|} = 0.$$

Porque un factor tiende a cero y el otro está acotado.

$$\frac{\omega(h,0)}{h} = \frac{\omega(h,0)}{|h|} \cdot \frac{|h|}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\omega(h,0)}{|h|} \cdot \frac{|h|}{h} \right) = 0.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h,0)}{h} = a.$$

$\therefore f_x(P_0) = a$ y de la misma forma se prueba $f_y(P_0) = b$. ■

Podemos decir que si no existe alguna de las derivadas parciales en P_0 f no es diferenciable en P_0 , o sea que la existencia de las derivadas parciales es condición necesaria para la diferenciability.

Por último probemos:

f diferenciable en $P_0 \Rightarrow \forall \vec{u} = (u_1, u_2) : \|\vec{u}\|=1 \exists D_{\vec{u}}f(P_0)$ y $D_{\vec{u}}f(P_0) = \vec{\nabla}f(P_0) \cdot \vec{u}$.

Sea f diferenciable en P_0 .

$$\frac{f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{a t u_1 + b t u_2 + \omega(t u_1, t u_2)}{t} = a u_1 + b u_2 + \frac{\omega(t u_1, t u_2)}{t}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t u_1, t u_2)}{|t|} = 0.$$

¿Porqué?

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t u_1, t u_2)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\omega(t u_1, t u_2)}{t} = 0.$$

Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + tu_1, y_o + tu_2) - f(x_o, y_o)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} au_1 + \lim_{t \rightarrow 0^+} bu_2 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\omega(tu_1, tu_2)}{t}$$

$$= au_1 + bu_2.$$

Como existe el límite, por definición de derivada direccional tenemos :

$$D_{\vec{u}} f(P_o) = (a, b) \cdot \vec{u} = (f_x(P_o), f_y(P_o)) \cdot \vec{u}$$

El vector $(f_x(P_o), f_y(P_o))$ se llama el gradiente de f en P_o y se denota $\vec{\nabla} f(P_o)$.

$$\therefore D_{\vec{u}} f(P_o) = \vec{\nabla} f(P_o) \cdot \vec{u} \quad \blacksquare$$

Podemos decir que si para alguna dirección \vec{u} no existe la derivada direccional de f en P_o , f no es diferenciable en P_o , o sea que la existencia de las derivadas direccionales en cualquier dirección es condición necesaria para la diferenciability.

Observemos que cuando f es diferenciable en P_o .

$$D_{(-\vec{u})} f(P_o) = -D_{\vec{u}} f(P_o)$$

El siguiente ejemplo muestra que estas condiciones necesarias no son condiciones suficientes.

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La función es continua en el origen, existen las derivadas parciales y todas las derivadas direccionales en el origen y sin embargo no es diferenciable en el origen.

Se deja como ejercicio la prueba de la continuidad.

$$f_x(0,0) = 0 \text{ pues } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \text{ y lo mismo para } f_y(0,0) = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{tu_1 \cdot tu_2}{\sqrt{(tu_1)^2 + (tu_2)^2}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 u_1 u_2}{t \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = u_1 \cdot u_2 \quad \therefore D_{\vec{u}} f(0,0) = u_1 \cdot u_2 \neq 0$$

Esto dice que f no es diferenciable en $(0,0)$ pues $\vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{u} = 0$; pero $D_{\vec{u}} f(0,0) \neq 0$.

Otra forma de ver que f no es diferenciable en el origen es usando la definición.

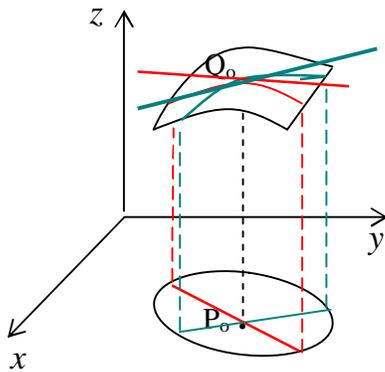
$$f(h, k) - f(0,0) = 0 \cdot h + 0 \cdot k + \omega(h,k) \quad \therefore \omega(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \text{ y } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2} \text{ no existe}$$

pues los límites repetidos valen cero; pero los radiales para $k=mh$ dependen de m . \blacksquare

**PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
PLANO TANGENTE.**

Vamos a ver que si f es diferenciable en P_0 , toda curva intersección de la gráfica de f con un plano vertical que pasa por P_0 tiene recta tangente en $Q_0 = (x_0, y_0, f(P_0))$. Las rectas tangentes se encuentran todas en un mismo plano que, por definición, es *el plano tangente a f en Q_0* .

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $P_0 = (x_0, y_0) \in D^\circ$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vector unitario.
 $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$



Supongamos que la representación gráfica de f sea una superficie de ecuación $z = f(x, y)$. Llamemos C_u a la curva intersección de la superficie con un plano vertical que pasa por P_0 y contiene a la recta de dirección \vec{u} .

$$C_u \begin{cases} z = f(P) \\ P = P_0 + t \vec{u} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad P = (x, y).$$

Una parametrización de C_u es:

$$g(t) = (x_0 + t u_1, y_0 + t u_2, \underbrace{f(P_0 + t \vec{u})}_{\varphi(t)}).$$

$$g(0) = Q_0$$

Si existe $\varphi'(0)$, entonces $\vec{g}'(0) = (u_1, u_2, \varphi'(0))$.

Veamos que existe $\varphi'(0)$.

Siendo $\varphi(t) = f(P_0 + t \vec{u})$, será $\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}$ si existe el límite.

El límite existe si existen los límites laterales y son iguales.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + h \vec{u}) - f(P_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(P_0)$$

Existe porque f es diferenciable en P_0 .

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(P_0 + h \vec{u}) - f(P_0)}{h}. \quad \text{Si } h = -s, \quad h \rightarrow 0^- \Rightarrow s \rightarrow 0^+.$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 - s \vec{u}) - f(P_0)}{-s} = - \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + s(-\vec{u})) - f(P_0)}{s} \\ &= -D_{-\vec{u}} f(P_0) = D_{\vec{u}} f(P_0). \quad \text{Porque } f \text{ es diferenciable en } P_0. \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = D_{\vec{u}} f(P_0) \quad \therefore \varphi'(0) = D_{\vec{u}} f(P_0).$$

Entonces $\vec{g}'(0) = (u_1, u_2, D_{\vec{u}} f(P_0))$. Por lo tanto la curva C_u tiene recta tangente en el punto Q_0 y su ecuación es:

$$Q = Q_0 + \lambda (u_1, u_2, D_{\vec{u}} f(P_0)) \quad (*) \quad \text{Con } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad Q = (x, y, z); \quad Q_0 = (x_0, y_0, f(P_0)).$$

Si $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{g}'(0) = (1, 0, f_x(P_0))$.

Si $\vec{u} = (0, 1)$, $\vec{g}'(0) = (0, 1, f_y(P_0))$.

La ecuación del plano que contiene a estos dos vectores es $\vec{n} \cdot (Q - Q_0) = 0$, donde

$$\vec{n} = (1, 0, f_x(P_0)) \times (0, 1, f_y(P_0)) = (-f_x(P_0), -f_y(P_0), 1) \quad \text{es un vector normal al plano.}$$

$$\therefore (-f_x(P_0), -f_y(P_0), 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(P_0)) = 0 \quad (**)$$

Para probar que este es el plano tangente, debemos mostrar que contiene a la recta (*) tangente en Q_0 a la curva C_u , cualquiera sea \vec{u} .

Entonces, reemplazando $Q - Q_0$ de (*) en (), obtenemos :**

$$\begin{aligned} (-f_x(P_0), -f_y(P_0), 1) \cdot \lambda (u_1, u_2, D_{\vec{u}} f(P_0)) &= -f_x(P_0) \lambda u_1 - f_y(P_0) \lambda u_2 + \lambda D_{\vec{u}} f(P_0) \\ &= \lambda (-D_{\vec{u}} f(P_0) + D_{\vec{u}} f(P_0)) = 0. \end{aligned}$$

Esto dice que el plano de ecuación (**) es el plano tangente a f en Q_0 .

La ecuación cartesiana de este plano es:

$$z - f(P_0) = f_x(P_0) (x - x_0) + f_y(P_0) (y - y_0) \quad \blacksquare$$

Ejemplo:

La ecuación del plano tangente en $(2, 1, 2)$ a la superficie de ecuación

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{es :} \quad 2x + y + 2z = 9$$

En efecto : $P_0 = (2, 1) \quad \therefore f(P_0) = z = \sqrt{9 - 2^2 - 1^2} = 2.$

$$f_x(P) = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \quad \Rightarrow \quad f_x(2, 1) = \frac{-2 \cdot 2}{2\sqrt{9 - 2^2 - 1^2}} = -1.$$

$$f_y(P) = \frac{-2y}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \quad \Rightarrow \quad f_y(2, 1) = \frac{-2 \cdot 1}{2\sqrt{9 - 2^2 - 1^2}} = -\frac{1}{2}.$$

$$z - 2 = f_x(P_0) (x - 2) + f_y(P_0) (y - 1).$$

$$z - 2 = -1(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 1).$$

$$\therefore 2x + y + 2z = 9.$$

CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA DIFERENCIABILIDAD.

Debido a la importancia que tienen las funciones diferenciables en el análisis matemático, resulta conveniente disponer de un criterio sencillo de diferenciabilidad. Esto es, establecer condiciones suficientes para que una función sea diferenciable en un punto.

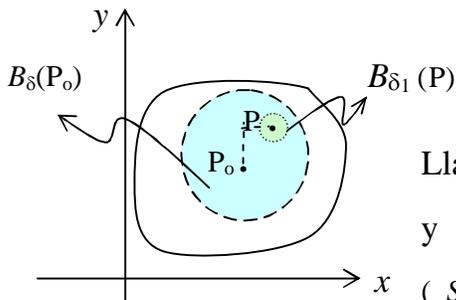
Teorema.

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in D^\circ$ tal que existen f_x, f_y en una bola $B_\delta(P_0)$ y ambas son continuas en P_0 , entonces f es diferenciable en P_0 .

Dem.

Como $P_0 \in D^\circ$ existe $B_\delta(P_0) \subset D$. Sea $P = (x_0+h, y_0+k) \in B_\delta(P_0)$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0).$$



Llamemos $\varphi(x) = f(x, y_0+k)$ con $x \in (x_0-\delta_1, x_0+h+\delta_1)$.

y $\psi(y) = f(x_0, y)$ con $y \in (y_0-\delta_1, y_0+k+\delta_1)$

(Sin pérdida de generalidad suponemos h y k positivos).

Entonces:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = (\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)) + (\psi(y_0+k) - \psi(y_0)).$$

(*)

Como existe f_x en $B_\delta(P_0)$ podemos afirmar que existe φ' en $(x_0-\delta_1, x_0+h+\delta_1)$.

Por ser φ función de una variable es continua en ese intervalo, y al ser

$[x_0, x_0+h] \subset (x_0-\delta_1, x_0+h+\delta_1)$ φ resulta continua en $[x_0, x_0+h]$ y derivable en (x_0, x_0+h) .

Con el mismo razonamiento ψ resulta continua en $[y_0, y_0+k]$ y derivable en (y_0, y_0+k) .

El Teorema del valor medio para funciones de una variable dice:

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = h \varphi'(x_0 + \theta_1 h) \quad \text{con } 0 < \theta_1 < 1.$$

$$\psi(y_0+k) - \psi(y_0) = k \psi'(y_0 + \theta_2 k) \quad \text{con } 0 < \theta_2 < 1.$$

Y como $\varphi'(x) = f_x(x, y_0+k)$ y $\psi'(y) = f_y(x_0, y)$

Reemplazando en (*):

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) &= h \varphi'(x_0 + \theta_1 h) + k \psi'(y_0 + \theta_2 k) \\ &= h f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0+k) + k f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k). \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \end{aligned}$$

Por otra parte, como f_x y f_y son continuas en P_0 , vale:

$$f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(h, k). \quad \text{Con} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(h, k) = 0.$$

$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k) = f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(h, k). \quad \text{Con} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(h, k) = 0.$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(h, k)] + k [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(h, k)].$$

Entonces:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(P) - f(P_0) - h f_x(P_0) - k f_y(P_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_1(h, k) h + \varepsilon_2(h, k) k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_1(h, k) h + \varepsilon_2(h, k) k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(h, k) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(h, k) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

= 0 porque en cada sumando un factor tiende a cero y el otro está acotado.

$$\therefore \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(P) - f(P_0) - h f_x(P_0) - k f_y(P_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Esto dice que f es diferenciable en P_0 puesto que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \underbrace{h \varepsilon_1(h, k) + k \varepsilon_2(h, k)}_{\omega(h, k)},$$

$$\text{y} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad \blacksquare$$

Cabe señalar que estas condiciones suficientes para la diferenciabilidad no son condiciones necesarias.

En efecto, el siguiente ejemplo muestra que la función puede ser diferenciable sin que ambas derivadas parciales sean continuas.

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Esta función es diferenciable en } (0,0) \text{ aunque } f_x \text{ no es continua en } (0,0) \text{ porque } f_x(0,0) = 0; \text{ pero no existe el límite de } f_x(x, y) \text{ cuando } (x, y) \text{ tiende a } (0,0).$$

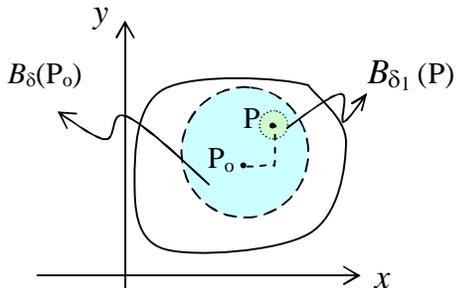
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + y^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Las funciones que tienen derivadas parciales continuas se llaman **funciones continuamente diferenciables**.

TEOREMA DE INVERSIÓN DEL ORDEN DE DERIVACIÓN

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in D^\circ$ tal que existen f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} en una bola $B_\delta(P_0)$ y ambas derivadas f_{xy}, f_{yx} son continuas en P_0 , entonces $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$.

Demostración:



Sea $P = (x_0+h, y_0+k) \in B_\delta(P_0)$ y llamemos:

$$\varphi(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0); \quad x \in (x_0-\delta_1, x_0+h+\delta_1).$$

$$\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y); \quad y \in (y_0-\delta_1, y_0+k+\delta_1)$$

(Sin pérdida de generalidad suponemos h y k positivos).

Entonces :

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0).$$

$$\psi(y_0+k) - \psi(y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

$$\text{Así } F(h, k) = \underbrace{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}_{(1)} = \underbrace{\psi(y_0+k) - \psi(y_0)}_{(2)} \quad (h, k) \in B_\delta(0,0).$$

Como existe f_x en $B_\delta(P_0)$, existe φ' en $(x_0-\delta_1, x_0+h+\delta_1)$, luego φ es continua en ese intervalo y al ser $[x_0, x_0+h] \subset (x_0-\delta_1, x_0+h+\delta_1)$ φ resulta continua en $[x_0, x_0+h]$ y derivable en (x_0, x_0+h) .

Con el mismo razonamiento ψ resulta continua en $[y_0, y_0+k]$ y derivable en (y_0, y_0+k) .

Por el Teorema del valor medio, en (1), podemos escribir:

$$F(h, k) = h \varphi'(x_0 + \theta_1 h) \\ = h [f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)] \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Usando nuevamente el T.V.M. en $[y_0, y_0+k]$ para la función $\Phi(y) = f_x(x_0 + \theta_1 h, y)$

con $y \in (y_0-\delta_1, y_0+k+\delta_1)$.

Φ es derivable, por existir f_{xy} , y por lo tanto continua en $[y_0, y_0+k] \subset (y_0-\delta_1, y_0+k+\delta_1)$.

Resulta:

$$[f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)] = \Phi(y_0+k) - \Phi(y_0) = k \Phi'(y_0 + \theta_2 k) = \\ = k f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

$$F(h, k) = h k f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

De la misma manera, usando el teorema del valor medio para la función ψ en (2) y luego nuevamente para la función χ tal que $\chi(x) = f_y(x, y_0 + \theta_4 k)$ se obtiene:

$$F(h, k) = k h f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k) \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1.$$

$$\therefore f_{x y}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = f_{y x}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k).$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{x y}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{y x}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)$$

Y por la continuidad de $f_{x y}$ y de $f_{y x}$ en P_0 resulta $f_{x y}(P_0) = f_{y x}(P_0)$, como queríamos probar. ■

El siguiente ejemplo muestra una función donde $f_{x y}(0,0) \neq f_{y x}(0,0)$.

Ejemplo:

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostrar que $f_{x y}(0,0) \neq f_{y x}(0,0)$. ¿Qué hipótesis del teorema no se cumple?

DIFERENCIALES

Hemos visto que las funciones diferenciables tienen la propiedad geométrica de poseer plano tangente. Con relación al plano tangente es interesante observar lo siguiente.

Sabemos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es difble en $P_0 \in D^\circ$ si existe $B_\delta(P_0) \subset D$ y existen ctes a y b tal que $\forall P = (x_0+h, y_0+k) \in B_\delta(P_0) \quad \Delta z = f(P) - f(P_0) = a h + b k + \omega(h,k)$.

Con ω tal que $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$.

Si llamamos $\lambda(h,k) = a h + b k$, resulta $\omega(h,k) = f(P) - f(P_0) - \lambda(h,k)$.

Probar

Observemos que $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(h,k) \mapsto ah + bk$ es una transformación lineal.

Podemos decir entonces que f es diferenciable en P_0 si existe una transformación

lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(P) - f(P_0) - \lambda(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (1)$

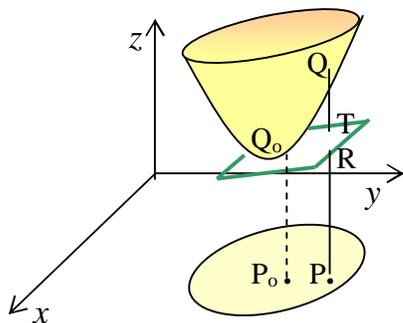
La igualdad (1) se interpreta diciendo que $f(P_0) + \lambda(h,k)$ es una buena aproximación de $f(P)$ cerca de P_0 .

La aplicación que transforma (h,k) en z , $(h,k) \mapsto z = f(P_0) + \lambda(h,k)$ tiene como representación gráfica un plano que es justamente el plano tangente a la gráfica de f en $Q_0 = (x_0, y_0, f(P_0))$.

En efecto:

$$z = f(P_0) + \lambda(h,k) = f(P_0) + a h + b k ; \text{ pero } a = f_x(P_0), b = f_y(P_0), h = x - x_0 \text{ y } k = y - y_0$$

entonces $z - f(P_0) = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$. Que es la ecuación del plano tangente a f en Q_0 .



A la aplicación lineal λ se le llama “diferencial de

f en P_0 ” y se denota df_{P_0} .

$f(P) - f(P_0) = \Delta z$ es la variación de cota de la función cuando pasamos de P_0 a P .

$z - f(P_0) = \lambda(h,k) = dz$ es la variación de cota del plano tangente cuando pasamos de P_0 a P .

En el dibujo $f(P_0) = \|P_0 Q_0\| = \|PR\|$
 $f(P) = \|PQ\|$

$\Delta z = \|RQ\|$ variación de cota de la función.

$dz = \|RT\|$ variación de cota del plano tangente.

Llamamos : $dx = h = x - x_0$; $dy = k = y - y_0$ y $dz = df_{P_0}(h,k)$

Entonces resulta: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ y , si f es diferenciable, existe dz tal que $\Delta z \approx dz$ cuando $P \approx P_0$.

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en P_0 , $df_{P_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal que, respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} , tiene una matriz 1×2 llamada la “matriz jacobiana de f ” que denotamos $f'(P_0)$.

$$\begin{aligned} df_{P_0}(h,k) &= f_x(P_0)h + f_y(P_0)k = (f_x(P_0) \ f_y(P_0)) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= f'(P_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \therefore f'(P_0) = (f_x(P_0) \ f_y(P_0)). \end{aligned}$$

Generalizamos ahora el concepto de diferenciabilidad para funciones vectoriales.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $P_0 \in \mathbb{R}^n$ $P = (x_1, \dots, x_n)$
 $P \mapsto (f_1(P), \dots, f_m(P))$

Definición:

f es diferenciable en P_0 sii existe una transformación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\vec{h} \mapsto (\lambda_1(\vec{h}), \dots, \lambda_m(\vec{h}))$

tal que $\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(P) - f(P_0) - \lambda(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$.
← vector nulo de \mathbb{R}^m
↖ vector nulo de \mathbb{R}^n

λ se llama diferencial de f en P_0 . $\lambda = df_{P_0}$. La matriz de λ en las bases canónicas

de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m se llama la matriz jacobiana de f en P_0 y se denota $f'(P_0)$.

$f'(P_0)$ es una matriz $m \times n$ y se puede probar que

$$f'(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Probar que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P = (x_1, \dots, x_n)$
 $P \mapsto (f_1(P), \dots, f_m(P))$

es diferenciable en $P_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si cada una de las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\forall i = 1, \dots, m$, es diferenciable en P_0 . $df = (df_1, \dots, df_m)$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Sean: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en D° y $A, B \in D^\circ$ tal que $\overline{AB} \subset D^\circ$. Entonces existe un punto $C \in \overline{AB}$, $C \neq A$ y $C \neq B$ tal que $f(B) - f(A) = \nabla f(C) \cdot (B - A)$.

Demostración:

$P \in \overline{AB} \Rightarrow P = A + t(B-A)$, $0 \leq t \leq 1$. Luego los valores z que toma la función en los ptos del segmento \overline{AB} son:

$$z = f(A + t(B-A)) = \varphi(t) \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Como A y B son ptos interiores de D podemos suponer que la función φ tiene dominio (a,b) que contiene a $[0,1]$.

Así $f(B) = \varphi(1)$ y $f(A) = \varphi(0)$.

Queremos probar que la función φ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ porque, si eso ocurre, podremos usar el Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial (para funciones de una variable).

Sea, entonces, $t \in [0,1] \subset (a,b)$ y miremos si existe $\varphi'(t)$. Esto es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \cdot \text{¿Existe?}. \text{ Veamos: } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$$

Como $\varphi(t) = f(A + t(B-A))$ y $P = A + t(B-A)$
 $\varphi(t+h) = f(A + (t+h)(B-A)) = f([A + t(B-A)] + h(B-A)) = f(P + h(B-A))$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(P + h(B-A)) - f(P)}{h} && \text{Llamemos } \vec{u} = \frac{B-A}{\|B-A\|} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(P + h\|B-A\|\vec{u}) - f(P)}{h} && \text{Llamemos } s = h\|B-A\| \\ &= \|B-A\| \cdot \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(P + s\vec{u}) - f(P)}{s} && \text{y como existe } D_{\vec{u}}f(P), \\ &= \|B-A\| \cdot D_{\vec{u}}f(P) && \text{De igual manera, si } s = -h\|B-A\| \end{aligned}$$

¿Por qué?

se puede probar:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} &= -\|B-A\| \cdot \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(P + s(-\vec{u})) - f(P)}{s} \\ &= \|B-A\| \cdot (-D_{-\vec{u}}f(P)) = \|B-A\| \cdot D_{\vec{u}}f(P) \end{aligned}$$

¿Por qué?

Como $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$ se sigue que existe

$$\varphi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \|B-A\| \cdot D_{\vec{u}} f(P) = \cancel{\|B-A\|} \vec{\nabla} f(P) \cdot \frac{B-A}{\cancel{\|B-A\|}} = \vec{\nabla} f(P) \cdot (B-A).$$

Luego existe φ' en $[0,1]$ y por lo tanto φ es continua en $[0,1]$.

Por el T.V.M.C.D. (para funciones de una variable), existe un n° real $\xi \in (0,1)$ tal que:

$$\boxed{\frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0} = \varphi'(\xi), \text{ donde } 0 < \xi < 1.} \quad (1)$$

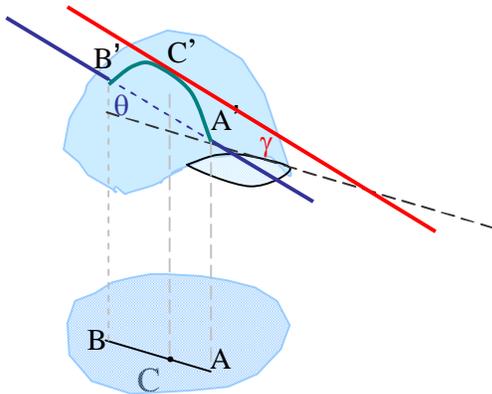
Como $f(A + t(B-A)) = \varphi(t)$, $P = A + t(B-A)$ y $\varphi'(t) = \vec{\nabla} f(P) \cdot (B-A)$.

Resulta $\varphi'(t) = \vec{\nabla} f(A + t(B-A)) \cdot (B-A)$.

si llamamos $C = A + \xi(B-A)$ y reemplazamos en (1), tenemos:

$C \in \overline{AB}$ y $f(B) - f(A) = \vec{\nabla} f(C) \cdot (B-A)$. Que es la tesis.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



$$\frac{f(B) - f(A)}{\|B - A\|} = \text{tg}\theta$$

$$\frac{\nabla f(C) \cdot (B - A)}{\|B - A\|} = D_{\vec{u}} f(C) = \text{tg}\gamma$$

$$\frac{f(B) - f(A)}{\|B - A\|} = \frac{\nabla f(C) \cdot (B - A)}{\|B - A\|} \Rightarrow \text{tg}\theta = \text{tg}\gamma$$

$$\therefore \theta = \gamma$$

Por lo tanto el T.V.M. asegura la existencia de un pto C en el segmento AB, tal que en el pto C' la curva intersección del plano con la superficie, tiene recta tangente paralela a la recta que pasa por A' y B'.

FUNCIONES COMPUESTAS

En la resolución de ciertos problemas es frecuente la necesidad de hacer un "cambio de variables" para facilitar el cálculo.

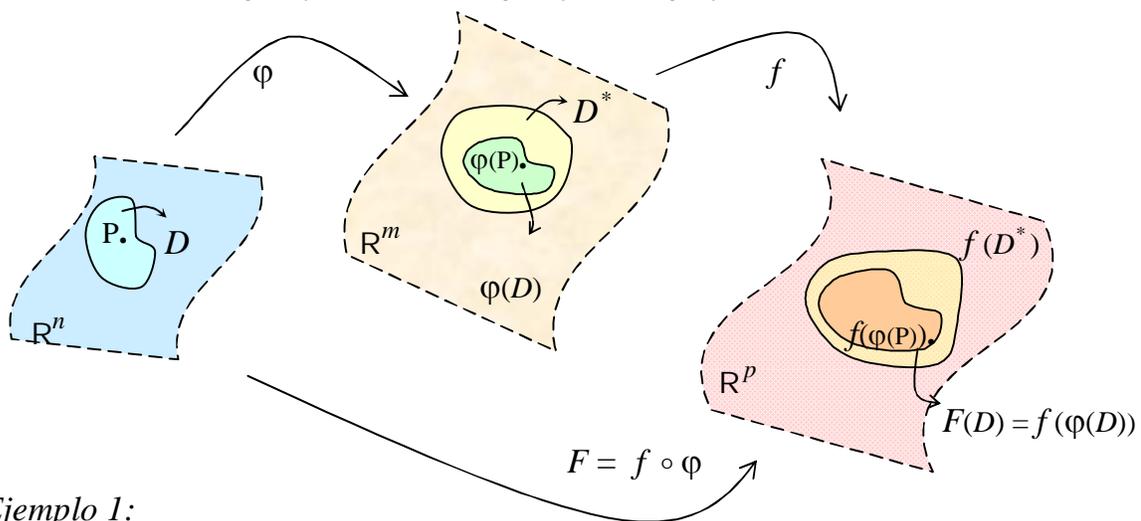
Vamos a definir lo que se entiende por función compuesta (o composición de funciones), aclarando que en la práctica hacer un "cambio de variables" significa descomponer una función compuesta.

Definición:

Sean $\varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f: D^* \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ tales que $\varphi(D) \subset D^*$.

$f \circ \varphi$, se llama la función "φ compuesta con f", o también se llama "la composición de φ con f" y se define así: $f \circ \varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.
 $P \mapsto f(\varphi(P))$

Si llamamos $F = f \circ \varphi$ $F(P) = (f \circ \varphi)(P) = f(\varphi(P))$.



Ejemplo 1:

Sea $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 9x^2y^2 = (x-y)^2 - (3xy)^2$.

Si hacemos el cambio de variables: $u(x,y) = x - y$; $v(x,y) = 3xy$.

y llamamos $f(u,v) = u^2 - v^2$.

Obtenemos: $f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$.

De acuerdo a la definición de composición de funciones, hemos descompuesto la función $F = f \circ \varphi$ donde $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

$F(x,y) = (f \circ \varphi)(x,y) = f(\varphi(x,y)) = f(u(x,y), v(x,y))$.

En este ejemplo $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto (x-y, 3xy)$ $(u,v) \mapsto u^2 - v^2$ $(x,y) \mapsto (x-y)^2 - (3xy)^2$
 u v $f(\varphi(x,y)) = f(x-y, 3xy)$ ■

Se puede probar:

Proposición: La composición de funciones continuas es una función continua.

En símbolos:

$$\boxed{\varphi \text{ continua en } P_o \wedge f \text{ continua en } \varphi(P_o) \Rightarrow f \circ \varphi \text{ continua en } P_o.}$$

También se puede probar:

Teorema de Derivación de Funciones Compuestas. (Regla de la Cadena)

φ diferenciable en P_o , f diferenciable en $\varphi(P_o) \Rightarrow f \circ \varphi$ diferenciable en P_o .

Y vale $(f \circ \varphi)'(P_o) = f'(\varphi(P_o)) \cdot \varphi'(P_o)$. ← Regla de la cadena

$(f \circ \varphi)'(P_o)$ es la matriz Jacobiana de $f \circ \varphi$ en P_o .

$f \circ \varphi$ es dfble en $P_o \therefore d_{P_o} f \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una transformación lineal, que en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^p , tiene asociada una matriz $p \times n$, la matriz Jacobiana de $f \circ \varphi$.

$f'(\varphi(P_o))$ es la matriz Jacobiana de f en $\varphi(P_o)$.

$\varphi'(P_o)$ es la matriz Jacobiana de φ en P_o .

$$\underbrace{(f \circ \varphi)'(P_o)}_{p \times n} = \underbrace{f'(\varphi(P_o))}_{(p \times m)} \cdot \underbrace{\varphi'(P_o)}_{(m \times n)}.$$

Ejemplo2:

Sean $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $P_o = (x_o, y_o)$ y $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ y $(u, v) \mapsto f(u, v)$

$\varphi(P_o) = (u_o, v_o)$ respectivamente. Entonces si llamamos $F = f \circ \varphi$, por la regla de cadena tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(P_o) & \frac{\partial F}{\partial y}(P_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_o, v_o) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_o, v_o) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P_o) & \frac{\partial u}{\partial y}(P_o) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(P_o) & \frac{\partial v}{\partial y}(P_o) \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto de matrices y obviando los ptos en donde se calculan las derivadas, tenemos la regla de la cadena escrita en la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

← regla de la cadena →

Que también podemos escribir así:

$$F_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x$$

$$F_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y$$

En cálculo es práctico denotar una función con el mismo símbolo que un elemento de su imagen.

Por ejemplo, si $f(x,y) = z$ escribimos $z = z(x,y)$.

Haciendo abuso de notación, podemos escribir : $z(u(x,y), v(x,y)) = z(x,y)$ y entonces:

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x .$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y .$$

Otros ejemplos:

$w(t) = w(x(t), y(t), z(t))$. Si w es diferenciable, entonces: $w'(t) = w_x x'(t) + w_y y'(t) + w_z z'(t)$.

$F(s,t) = F(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$. F difble, entonces: $F_s = F_x x_s + F_y y_s + F_z z_s$.

$$F_t = F_x x_t + F_y y_t + F_z z_t .$$

Ejercicio:

1) Si $z = f(xy, x + y)$ y existen las derivadas parciales segundas de f , calcular z_{xy}

2) Si $z = f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$ y existen f'' y $g'' \forall x \neq 0, y \neq 0$, probar :

$$x^2 z_{xx} + x z_x = y^2 z_{yy} + y z_y .$$

En la demostración del Teorema de Derivación de Funciones Compuestas vamos a usar los siguientes resultados cuya demostración se deja como ejercicio.

Proposición 1 :

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal.

Probar que existe $K \in \mathbb{R}, K > 0$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}^n$ es $\|T(P)\| \leq K \|P\|$.

Proposición 2 :

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $P_0 \in D^\circ$.

Probar que existen $\delta, K \in \mathbb{R}; \delta, K > 0$ tal que $\|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|f(P) - f(P_0)\| \leq K \|P - P_0\|$.

Observación :

Sabemos que f es diferenciable en P_0 sii existe una transformación lineal λ tal que

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(P) - f(P_0) - \lambda(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{\theta}. \quad \text{Esto es lo mismo que decir:}$$

O sea :
 $\|Z(P-P_0)\| \rightarrow 0$
 cuando $P \rightarrow P_0$.

$$f(P) - f(P_0) = \lambda(P-P_0) + Z(P-P_0) \quad \text{con} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \|Z(P-P_0)\| = \vec{\theta}$$

TEOREMA DE DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

(Sin demostración para los alumnos de Cálculo III)

Sean $\varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f: D^* \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$; $\varphi(D) \subset D^*$. Con $P_0 \in D^0$ y $\varphi(P_0) \in (D^*)^0$.
 φ diferenciable en P_0 , f diferenciable en $\varphi(P_0) \Rightarrow f \circ \varphi$ diferenciable en P_0 .

Dem.

Tenemos que probar que ,bajo las hipótesis dadas, existe una transformación lineal

$$v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{tal que} \quad (f \circ \varphi)(P) - (f \circ \varphi)(P_0) = v(P-P_0) + Z(P-P_0) \quad \text{con} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \|Z(P-P_0)\| = \vec{\theta}.$$

$$(f \circ \varphi)(P) - (f \circ \varphi)(P_0) = f(\varphi(P)) - f(\varphi(P_0))$$

Como f es diferenciable en $\varphi(P_0)$ existe una transf. lineal $\lambda: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que

$$f(Q) - f(\varphi(P_0)) = \lambda(Q - \varphi(P_0)) + Z_1(Q - \varphi(P_0)) \quad \text{con} \quad \lim_{Q \rightarrow \varphi(P_0)} \|Z_1(Q - \varphi(P_0))\| = \vec{\theta}.$$

$$f(\varphi(P)) - f(\varphi(P_0)) = \lambda(\varphi(P) - \varphi(P_0)) + Z_1(\varphi(P) - \varphi(P_0)) \quad \text{con} \quad \lim_{\varphi(P) \rightarrow \varphi(P_0)} \|Z_1(\varphi(P) - \varphi(P_0))\| = \vec{\theta}$$

Al ser φ continua en P_0 , por ser diferenciable en P_0 , $\varphi(P) \rightarrow \varphi(P_0)$ cuando $P \rightarrow P_0$.

$\therefore \|Z_1(\varphi(P) - \varphi(P_0))\| \rightarrow 0$ cuando $P \rightarrow P_0$, y también existe una t. l. $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = \mu(P-P_0) + Z_2(P-P_0) \quad \text{con} \quad \|Z_2(P-P_0)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } P \rightarrow P_0.$$

$$f(\varphi(P)) - f(\varphi(P_0)) = \lambda(\mu(P-P_0) + Z_2(P-P_0)) + Z_1(\varphi(P) - \varphi(P_0))$$

$$= \lambda(\mu(P-P_0)) + \underbrace{(\lambda(Z_2(P-P_0)) + Z_1(\varphi(P) - \varphi(P_0))) \frac{\|\varphi(P) - \varphi(P_0)\|}{\|P - P_0\|}}_{Z(P-P_0)} \|P - P_0\|$$

Por las proposiciones 1 y 2 existen K y K' tal que:

$$\|Z(P-P_0)\| \leq K \|Z_2(P-P_0)\| + \|Z_1(\varphi(P) - \varphi(P_0))\| \frac{K' \|P - P_0\|}{\|P - P_0\|}.$$

$\|Z_2(P-P_0)\| \rightarrow 0$ cuando $P \rightarrow P_0$.
 $\|Z_1(\varphi(P) - \varphi(P_0))\| \rightarrow 0$ cuando $P \rightarrow P_0$.

$\therefore \|Z(P-P_0)\| \rightarrow 0$ cuando $P \rightarrow P_0$. Entonces :

$$(f \circ \varphi)(P) - (f \circ \varphi)(P_0) = \underbrace{(\lambda \circ \mu)}_v(P-P_0) + Z(P-P_0) \quad \text{con} \quad \|Z(P-P_0)\| \rightarrow \vec{\theta} \text{ cuando } P \rightarrow P_0.$$

$$(f \circ \varphi)(P) - (f \circ \varphi)(P_0) = v(P-P_0) + Z(P-P_0) \quad \text{con} \quad \|Z(P-P_0)\| \rightarrow \vec{\theta} \text{ cuando } P \rightarrow P_0.$$

Esto dice $f \circ \varphi$ diferenciable en P_0 , como queríamos probar. ■

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas hasta el orden n en D^0 , entonces $\forall P = (x, y) \in D^0$ f es diferenciable en P y existe $d_P f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:
 $d_P f(h, k) = f_x(P)h + f_y(P)k$.

Vamos a usar la siguiente notación: $d_P f(h, k) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f(P)$.

Si $n \geq 2$, existen y son continuas las derivadas parciales de $d_P f(h, k) = f_x(P)h + f_y(P)k$. Por lo tanto $d_P f(h, k)$ es diferenciable y existe $d_P(d_P f(h, k))$.

Llamamos $d_P^2 f(h, k) = d_P(d_P f(h, k)) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})((h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f(P))$
 $= (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})(f_x(P)h + f_y(P)k)$
 $= h(f_{xx}(P)h + f_{yx}(P)k) + k(f_{xy}(P)h + f_{yy}(P)k)$
 $= h^2 f_{xx}(P) + 2hk f_{xy}(P) + k^2 f_{yy}(P)$

*$f_{yx}(P) = f_{xy}(P)$
¿Por qué?*

Con la notación anterior: $d_P^2 f(h, k) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$.

Y se puede probar por inducción:

$d_P^n f(h, k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} h^{n-i} k^i \frac{\partial^n f(P)}{\partial y^i \partial x^{n-i}}$; que, de acuerdo a la notación antes usada, es:

$$d_P^n f(h, k) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n f(P)$$

Observación:

La forma diferencial de 1er orden no cambia para las funciones compuestas.

Si $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$.
 $dF = F_x dx + F_y dy = (f_u u_x + f_v v_x) dx + (f_u u_y + f_v v_y) dy$
 $= f_u (u_x dx + u_y dy) + f_v (v_x dx + v_y dy) = f_u du + f_v dv = df$.

$dF = F_x dx + F_y dy = f_u du + f_v dv = df$. $\therefore dF = df$

Pero la forma diferencial de 2do orden sí cambia.

$d^2 F = F_{xx} dx^2 + 2 F_{xy} dx dy + F_{yy} dy^2 =$
 $= ((f_{uu} u_x + f_{uv} v_x) u_x + f_u u_{xx} + (f_{vu} u_x + f_{vv} v_x) v_x + f_v v_{xx}) dx^2 +$
 $+ 2((f_{uu} u_y + f_{uv} v_y) u_x + f_u u_{xy} + (f_{vu} u_y + f_{vv} v_y) v_x + f_v v_{xy}) dx dy$
 $+ ((f_{uu} u_y + f_{uv} v_y) u_y + f_u u_{yy} + (f_{vu} u_y + f_{vv} v_y) v_y + f_v v_{yy}) dy^2$
 $d^2 F = f_{uu} du^2 + 2 f_{uv} du dv + f_{vv} dv^2 + f_u d^2 u + f_v d^2 v$.

$\therefore d^2 F = d^2 f + f_u d^2 u + f_v d^2 v$.

DESARROLLO DE TAYLOR.

Para funciones de una variable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si f tiene derivada de orden $n+1$ continua en un entorno de x_0 , entonces en ese entorno existe un número ξ tal que :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{T_n(x-x_0)} + R_n(x).$$

donde $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$.

El polinomio $T_n(x-x_0)$ se llama el polinomio de Taylor de f de grado n en $(x-x_0)$.
Y $T_n(x-x_0) + R_n(x)$ se llama el desarrollo de Taylor de grado n de f alrededor de x_0 .

Vamos a generalizar el desarrollo de Taylor para funciones de dos variables.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas hasta el orden n en una bola $B_\delta(P_0)$. Y sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$.

Sea $P = P_0 + t \vec{u}$.

$$P - P_0 = (x-x_0, y-y_0) = (t u_1, t u_2)$$

Llamemos $F(t) = f(P_0 + t \vec{u}) = f(\overbrace{x_0 + t u_1}^x, \overbrace{y_0 + t u_2}^y)$.

El polinomio de Taylor de grado n para F en t es :

$$F(0) + F'(0) t + \frac{1}{2!} F''(0) t^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) t^n.$$

Usando la regla de la cadena calculemos las derivadas $F'(t), F''(t), \dots, F^{(n)}(t)$:

$$F'(t) = f_x(x,y) u_1 + f_y(x,y) u_2$$

$$\therefore F'(0) t = f_x(P_0) t u_1 + f_y(P_0) t u_2 = d_{P_0} f(t u_1, t u_2) = d_{P_0} f(P-P_0).$$

$$F''(t) = f_{xx}(P) u_1^2 + 2 u_1 u_2 f_{xy}(P) + f_{yy}(P) u_2^2.$$

$$\therefore F''(0) t^2 = f_{xx}(P_0) t^2 u_1^2 + 2 t u_1 t u_2 f_{xy}(P_0) + f_{yy}(P_0) t^2 u_2^2 = d_{P_0}^2 f(P-P_0).$$

Y así, por inducción, $F^{(n)}(0) t^n = d_{P_0}^n f(P-P_0)$.

Por lo que el polinomio de Taylor de grado n en $P-P_0$ para f es :

$$T_n(P-P_0) = f(P_0) + \frac{1}{1!} d_{P_0} f(P-P_0) + \frac{1}{2!} d_{P_0}^2 f(P-P_0) + \dots + \frac{1}{n!} d_{P_0}^n f(P-P_0).$$

Damos el enunciado del teorema de Taylor para funciones de dos variables:

TEOREMA DE TAYLOR.

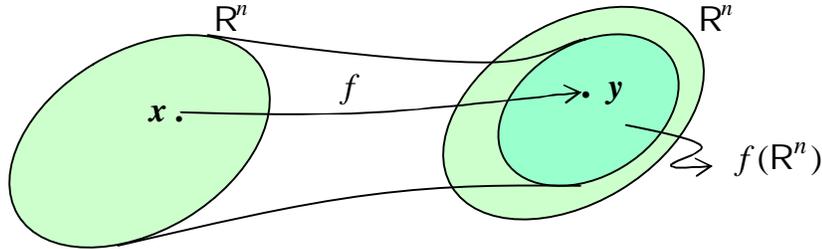
Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas hasta el orden n en un entorno de P_0 y sea $f(P) = T_n(P-P_0) + R_n(P)$ el desarrollo de Taylor de grado n de f alrededor de P_0 .

Entonces : $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - T_n(P-P_0)}{\|P - P_0\|^n} = 0$ y $T_n(P-P_0)$ es el único

polinomio de grado n con esta propiedad.

FUNCIONES INVERSAS.

Si tenemos una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que transforma vectores x en vectores y , la imagen $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$



A partir de $y \in f(\mathbb{R}^n)$ nos preguntamos :

1. ¿Qué vectores $x \in \mathbb{R}^n$ se transforman en y por la acción de f ? y
2. ¿ Existe una función $f^{-1}: f(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada $y \in f(\mathbb{R}^n)$ le asigne un único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = y$?

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

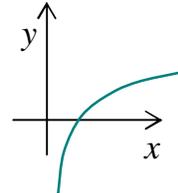
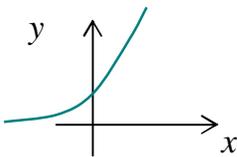
Si la función f es inyectiva existe $f^{-1}: f(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(y) = x$, si y sólo si $f(x) = y$.

f^{-1} se llama la función inversa de f y $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale : $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Ejemplo 1 :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x$$

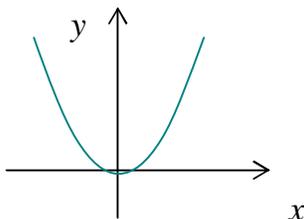
$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x$$



Ejemplo 2:

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no es inyectiva, por lo tanto no tiene inversa.

$$x \mapsto x^2$$

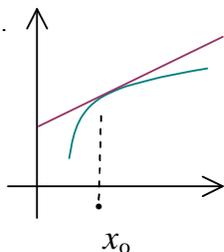


Pero si restringimos el dominio de f y consideramos esta otra función $f_1: [0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sí tiene inversa

$$f_1^{-1}: [0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x}$$

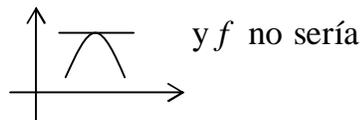
Se sabe que si una función real de una variable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada continua en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$ entonces existe un entorno N de x_0 donde f tiene inversa

$$f^{-1}: f(N) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$



$f'(x_0) \neq 0$ dice que la tangente no es horizontal
 \therefore existe un entorno de x_0 donde f es inyectiva.

Si $f'(x_0) = 0$ podría ocurrir



y f no sería inyectiva.

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si es diferenciable en un punto x_0 , sabemos que existe una función lineal λ tal que $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \lambda(h)$ cuando $h \approx \theta$.

$\lambda = d_{x_0}f$ y la matriz jacobiana de f , $f'(x_0) = A$ es una matriz $n \times n$.

$$\lambda(h) = A h = k.$$

Sabemos que si $\det A \neq 0$, A tiene inversa A^{-1} , luego λ tiene inversa λ^{-1} .

λ^{-1} también es lineal y su matriz en la base canónica de \mathbb{R}^n es A^{-1} .

$$\lambda^{-1}(k) = A^{-1}k = h \quad \text{sii} \quad A h = k.$$

Cabe esperar que si f es diferenciable en un punto x_0 , en las proximidades de ese punto f se comportará como la función $\lambda + f(x_0)$. Es decir que si λ tiene inversa λ^{-1} tendrá inversa en un entorno de x_0 . Eso es lo que afirma el teorema de la función inversa que enunciamos sin demostración.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en un abierto que contiene a x_0 y $\det f'(x_0) \neq 0$.

Entonces existen un abierto U que contiene a x_0 y un abierto V que contiene a $f(x_0)$ tales que $f: U \rightarrow V$ tiene inversa continua $f^{-1}: V \rightarrow U$ que es diferenciable y

$$\forall y \in V \text{ es } [f^{-1}]'(y) = [f'(x)]^{-1}.$$

Ejemplo.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x+y^2, x^2+y) \quad \text{¿ Dónde es } \det f'(x,y) \neq 0 ?$$

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{bmatrix} = 1 - 4xy \neq 0 \quad \forall (x,y) : xy \neq \frac{1}{4}.$$

Por ejemplo si $x_0 = (1,-1)$, $f(x_0) = (2,0)$ \therefore existen $B_\delta(1,-1)$ y $B_\delta^*(2,0)$ tales que $\forall (u,v) \in B_\delta^*(2,0)$ hay un único $(x,y) \in B_\delta(1,-1)$ que cumple $(x+y^2, x^2+y) = (u,v)$.

$$f'(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; [f^{-1}]'(2,0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Aún cuando no encontremos f^{-1} , la función afín que aproxima $(u,v) = (2+h, 0+k)$ cuando $(h,k) \approx (0,0)$ es:

$$f^{-1}(2,0) + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}.$$

Si $(h,k) = (0.01, 0.02)$
 $f^{-1}(2.01, 0.02) \approx (1.01, -1)$

FUNCIONES DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE.

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ establece una relación entre vectores de \mathbb{R}^n y de \mathbb{R}^m . Es posible que los vectores estén relacionados por una fórmula que no exprese directamente a uno como función del otro.

Por ejemplo la fórmula $\frac{pv}{t} = k_0$ expresa la relación entre la presión p y el volumen y la temperatura (v,t) de un gas en un recipiente.

También, las ecuaciones: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 $x + y + z = 0$ pueden interpretarse como

una relación entre las tres coordenadas (x, y, z) de un punto en una circunferencia de radio 1 con centro $(0,0,0)$ en \mathbb{R}^3 .

En estos ejemplos las ecuaciones no dan una fórmula explícita para una de las variables en función de las otras.

Consideraremos la aplicación del cálculo a este tipo de relaciones.

Definición.

Dadas dos funciones $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la ecuación $F(x,y) = 0$ define a f implícitamente, si $F(x, f(x)) = 0$ para todo x del dominio de f .

Ejemplo:

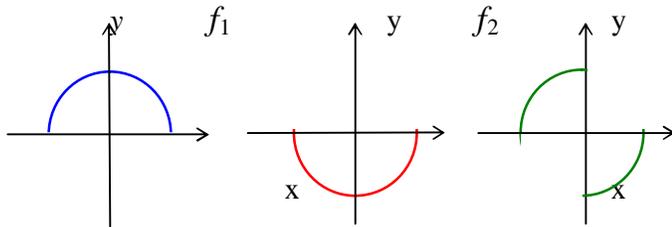
Sea $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Entonces la ecuación $F(x,y) = 0$ define implícitamente, entre otras, a las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1.$$

f_3

$$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1.$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



x La ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ define implícitamente a la función f_1 . En efecto:

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1] \quad x^2 + (f_1(x))^2 - 1 &= x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 \\ &= x^2 + (1-x^2) - 1 = 0. \end{aligned}$$

De igual manera se puede comprobar que la ecuación define implícitamente a f_2 , a f_3 y a infinitas funciones en $[-1,1]$. Observamos que no todas son continuas. ■

Daremos ahora la definición de función implícita en el caso general:

Definición.

Sean $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que la ecuación $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \theta$
 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$
define implícitamente a f , si $\forall \mathbf{x} \in D$ es $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \theta$.

Ejemplo2:

El par de ecuaciones (*) $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$ define a dos de las variables

como funciones de la restante. Por ejemplo a z y a y como funciones de x .

Esto es : $z = z(x), y = y(x)$.

En efecto: $\begin{cases} y = 1 - x \\ z = x \end{cases}$ es solución del sistema (*) pues $\begin{cases} 2x + (1 - x) - x - 1 = 0 \\ x + 2(1 - x) + x - 2 = 0 \end{cases}$.

Este es un ejemplo del caso $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en el que la ecuación $F(x,y,z) = \theta$ es $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z - 1, x + 2y + z - 2)$

$(2x + y - z - 1, x + 2y + z - 2) = (0,0)$ y define implícitamente la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (y,z) = (1 - x, x)$

Ejemplo3: La ecuación $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ implícitamente define a z como función de x y de y : $z = z(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ en \mathbb{R}^2 .

Aquí $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z + 1$.

Ejemplo4: La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ no define implícitamente ninguna función.

Esto es: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall z \in \mathbb{R}$ $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \neq 0$.

Como se ve en estos ejemplos, no siempre una ecuación $F(x,y) = \theta$ define implícitamente unas de las variables como función de las otras.

Si la ecuación es trascendente , como la siguiente: $z^2 = \ln(e^x + e^y - e^z - 1)$, o lo que es lo mismo $z^2 - \ln(e^x + e^y - e^z - 1) = 0$, no es evidente que implícitamente defina o no a z como función de x e y . (no podemos expresar, de manera explícita, $z = z(x,y)$ tal que reemplazada en la ecuación la verifique.)

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que una ecuación defina implícitamente una función.

Derivadas parciales de las funciones componentes, continuas.

El Teorema de la Función Implícita

Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable y sea $Q_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ tal que :

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\mathbf{x}}, \underbrace{(y_1, \dots, y_m)}_{\mathbf{y}} \mapsto (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

1) $F(Q_0) = \theta$.

2) $\det M \neq 0$ donde M es la matriz $m \times m$ $M = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(Q_0) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(Q_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(Q_0) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(Q_0) \end{bmatrix}$

Entonces existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que la ecuación $F(x,y) = \theta$ define implícitamente una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$

I) En el caso $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, el T. de la función implícita afirma :

Si F_x, F_y, F_z son continuas y existe $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tal que :

1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

2) $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Entonces $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a $z = z(x, y)$ en un abierto que contiene a (x_0, y_0) , z es diferenciable.

Para determinar z_x, z_y , derivamos usando la regla de la cadena en $F(x, y, z(x, y)) = 0$.

$$F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z) z_x(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

$$F_y(x, y, z) + F_z(x, y, z) z_y(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

II) En el caso $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, el T. de la función implícita afirma :

Si $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}$ son continuas y existe $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tal que :

1) $F_1(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $F_2(x_0, y_0, z_0) = 0$

2)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{Q_0} \neq 0.$$
 Entonces $F(x, y, z) = (0, 0)$ define implícitamente a $y = y(x)$ y a $z = z(x)$ en un abierto que contiene a x_0 . $y(x), z(x)$ son derivables.

y' y z' se determinan usando la regla de la cadena en $F(x, y(x), z(x)) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y'(x) + \frac{\partial F_1}{\partial z} z'(x) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} y'(x) + \frac{\partial F_2}{\partial z} z'(x) = 0 \end{cases} \quad \text{Llamando } J\left(\begin{matrix} F_1, F_2 \\ y, z \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix},$$

obtenemos:

$$y'(x) = -\frac{J\left(\begin{matrix} F_1, F_2 \\ x, z \end{matrix}\right)}{J\left(\begin{matrix} F_1, F_2 \\ y, z \end{matrix}\right)}, \quad z'(x) = -\frac{J\left(\begin{matrix} F_1, F_2 \\ x, y \end{matrix}\right)}{J\left(\begin{matrix} F_1, F_2 \\ y, z \end{matrix}\right)}$$

III) En el caso $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, el T. de la función implícita afirma :

Si $F_{1x}, F_{1y}, F_{1u}, F_{1v}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2u}, F_{2v}$ son continuas y existe $Q_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ tal que :

1) $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ y $F_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$

2)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{Q_0} \neq 0.$$
 Entonces $F(x, y, u, v) = (0, 0)$ define implícitamente a $u = u(x, y)$ y a $v = v(x, y)$ en un abierto que contiene a (x_0, y_0) , $u(x, y), v(x, y)$ son diferenciables.

u_x, u_y, v_x, v_y se obtienen usando la regla de la cadena en $F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_x(x,y) = -\frac{J\left(\frac{F_1, F_2}{x, v}\right)}{J\left(\frac{F_1, F_2}{u, v}\right)} ; & v_x(x,y) = -\frac{J\left(\frac{F_1, F_2}{u, x}\right)}{J\left(\frac{F_1, F_2}{u, v}\right)} \\ u_y(x,y) = -\frac{J\left(\frac{F_1, F_2}{y, v}\right)}{J\left(\frac{F_1, F_2}{u, v}\right)} ; & v_y(x,y) = -\frac{J\left(\frac{F_1, F_2}{u, y}\right)}{J\left(\frac{F_1, F_2}{u, v}\right)} \end{matrix}$$

Los determinantes J se llaman Jacobianos.

Veamos un ejemplo del caso I).

Ejemplo:

Determinar si la ecuación $x^2 + z - \ln(yz) = 6$ define implícitamente a z como función diferenciable de x e y .

Busquemos un pto (x_0, y_0, z_0) que verifique la ecuación.

$$1) \quad 2^2 + 2 - \ln\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = 6$$

La función $F(x, y, z) = x^2 + z - \ln(yz) - 6$, en un entorno del punto $(2, \frac{1}{2}, 2)$ que verifica la ecuación, es continuamente diferenciable porque la derivadas:

$$F_x = 2x, \quad F_y = -\frac{1}{y}, \quad F_z = 1 - \frac{1}{z} \text{ son continuas.} \quad 2) \quad F_z(2, \frac{1}{2}, 2) = 1 - \frac{1}{2} \neq 0.$$

El Teorema de la Función Implícita dice que en un entorno de $(2, \frac{1}{2})$, z es función $z(x, y)$ de x e y , diferenciable, por lo tanto existen z_x y z_y .

$$2x + z_x - \frac{1}{z} z_x = 0 \quad \therefore \quad z_x = \frac{2zx}{1-z} \quad . \quad z_y - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} z_y = 0 \quad \therefore \quad z_y = \frac{-z}{y(1-z)} .$$

Ejercicio 1:

La ecuación $F(x + y + z, x y z) = 0$ define implícitamente a $z(x, y)$ como función diferenciable de x e y . Calcular z_x .

$$F(\underbrace{x + y + z}_u, \underbrace{xyz}_v) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_u(1 + z_x) + F_v(yz + xy z_x) = 0$$

$$z_x(F_u + xy F_v) + F_u + yz F_v = 0 \quad \Rightarrow \quad z_x = -\frac{F_u + yz F_v}{F_u + xy F_v} .$$

Ejercicio 2:

La ecuación $z + x \overbrace{\varphi(x y \cos^2 z)}^t = 0$ define implícitamente a $z(x, y)$ como función diferenciable de x e y . Calcular z_x .

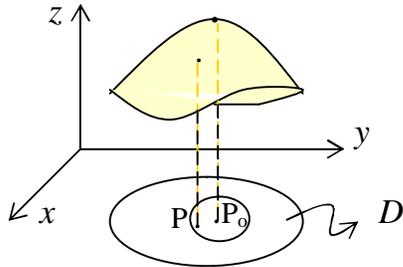
$$z_x + \varphi(t) + x \varphi'(t) \underbrace{(y \cos^2 z - xy 2 \cos z \cdot \text{sen } z \cdot z_x)}_{\text{sen } 2z} = 0$$

$$z_x = -\frac{\varphi(t) + xy \cos^2 z \varphi'(t)}{1 - x^2 y \text{sen } 2z \varphi'(t)} .$$

VALORES EXTREMOS.
EXTREMOS RELATIVOS.

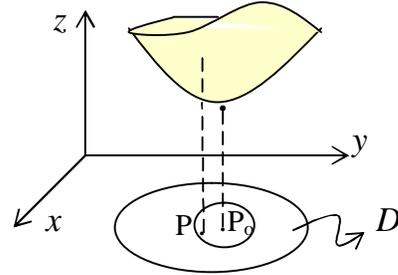
Consideremos una función $f:D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Puede ocurrir que en las proximidades de $P_0 \in D^\circ$ la gráfica de f sea de la forma que se indica en los siguientes casos:

(1)



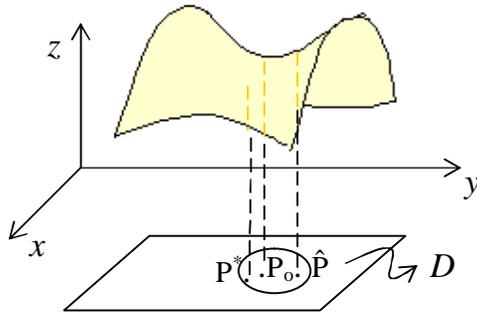
Existe una bola $B_\delta(P_0) \subset D$ tal que
 $\forall P \in B_\delta(P_0)$ es $f(P) \leq f(P_0)$

(2)



Existe una bola $B_\delta(P_0) \subset D$ tal que
 $\forall P \in B_\delta(P_0)$ es $f(P) \geq f(P_0)$

(3)



Para toda bola $B_\delta(P_0) \subset D$ existen puntos

P^* y \hat{P} tales que:

$$P^* \in B_\delta(P_0) \wedge f(P^*) < f(P_0) .$$

$$\hat{P} \in B_\delta(P_0) \wedge f(\hat{P}) > f(P_0) .$$

En el caso (1) decimos que f tiene en P_0 un máximo relativo $f(P_0)$. O que $f(P_0)$ es un máximo relativo de f .

En el caso (2) decimos que f tiene en P_0 un mínimo relativo $f(P_0)$. O que $f(P_0)$ es un mínimo relativo de f .

Si ocurre el caso (3) decimos que en P_0 f no tiene un extremo relativo. O que $f(P_0)$ no es un valor extremo relativo de f .

Definición.

Sea $f:D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in D^\circ$.

El nº real $f(P_0)$ es un extremo relativo de $f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists B_\delta(P_0) : \forall P \in B_\delta(P_0) \quad f(P) \leq f(P_0) \quad (1) \\ \vee \\ \exists B_\delta(P_0) : \forall P \in B_\delta(P_0) \quad f(P) \geq f(P_0) \quad (2) \end{cases}$

Si ocurre (1) el extremo relativo es un máximo.

Si (2) el extremo relativo es un mínimo.

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in D$.

Máximo absoluto.

$f(P_0)$ es máximo absoluto de f si y sólo si $\forall P \in D$ es $f(P) \leq f(P_0)$.

Mínimo absoluto.

$f(P_0)$ es mínimo absoluto de f si y sólo si $\forall P \in D$ es $f(P) \geq f(P_0)$.

Observaciones:

Los extremos relativos, cuando existen, se presentan solamente en puntos interiores del dominio de f .

El concepto de extremo relativo es un concepto local. Puede ocurrir que una función tenga un mínimo relativo que sea mayor que un máximo relativo.

Los extremos absolutos pueden presentarse en puntos de la frontera de D y cuando existen son únicos. ¡ Probar !

Toda función f continua en D cerrado y acotado tiene máximo absoluto y mínimo absoluto. (Este resultado se conoce con el nombre de Teorema de Weierstrass.)

La siguiente proposición da una condición necesaria para la existencia de extremos relativos cuando existen las derivadas parciales.

Proposición :

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, P_0 = (x_0, y_0) \in D^\circ.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \exists f_x(P_0), f_y(P_0) \\ 2) f(P_0) \text{ es extremo relativo} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}.$$

Dem.

Tenemos que probar que si valen 1) y 2) entonces $f_x(P_0) = 0$ y $f_y(P_0) = 0$

Para la demostración vamos a suponer que el extremo es un máximo relativo.

Entonces:

$$\exists B_\delta(P_0) : \forall P = (x_0 + h, y_0 + k) \in B_\delta(P_0) \text{ es } f(P) \leq f(P_0).$$

$$P \in B_\delta(P_0) \Leftrightarrow \sqrt{h^2 + k^2} < \delta$$

Esto es lo mismo que decir $\exists \delta > 0$:

$$\sqrt{h^2 + k^2} < \delta \Rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leq 0. \quad \text{En particular si } k = 0 :$$

$$|h| < \delta \Rightarrow f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0.$$

Si $0 < h < \delta$ entonces $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \leq 0$. (*)

Si $-\delta < h < 0$ entonces $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \geq 0$. (**)

Por hipótesis existe $f_x(P_0)$.

$$f_x(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \end{cases}$$

Como existen los límites laterales y ambos son iguales a $f_x(P_0)$, de (*) y (***) tenemos:

$$f_x(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \leq 0.$$

$$f_x(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \geq 0.$$

De $0 \leq f_x(P_0) \leq 0$ se sigue $f_x(P_0) = 0$ como queríamos probar. ■

La demostración de $f_y(P_0) = 0$ es similar y se deja como ejercicio.

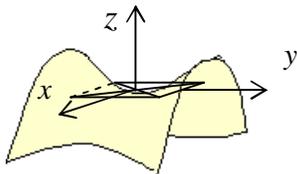
Los puntos para los cuales $\vec{\nabla}f(P_0) = \vec{0}$ se llaman puntos críticos.

La condición de que se anulen las derivadas parciales es sólo condición necesaria para la existencia de extremo relativo. No es condición suficiente. Una función puede tener puntos críticos y sin embargo puede no tener extremos relativos en esos puntos.

Ejemplo: Sea f tal que $f(x, y) = y^2 - x^2$.

$$f_x(x, y) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f_y(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \therefore P_0 = (0,0)$ es punto crítico y sin embargo $f(0,0) = 0$ no es extremo relativo porque toda bola con centro en P_0 tiene puntos $(h,0)$ y $(0,k)$ tales que $f(h,0) < 0$ y $f(0,k) > 0$.



Como en $P_0 = (0,0)$ no hay extremo relativo, el plano tangente atraviesa la gráfica de f .

Si P_0 es un punto crítico donde no hay extremo relativo decimos que $(x_0, y_0, f(P_0))$ es un punto silla.

Si en un punto crítico hay extremo relativo, en las proximidades del punto la gráfica de f está sobre el plano tangente si el extremo relativo es un mínimo y debajo del plano tangente si es un máximo.

Vamos a ver una condición suficiente para la existencia de extremo relativo en un punto crítico.

Así como las funciones diferenciables tienen plano tangente y, en un entorno de ese punto, la cota de la función es próxima a la cota del plano tangente, si la función es continuamente diferenciable de orden dos tiene diferencial segunda. En ese caso la gráfica de la función es próxima a la gráfica de la diferencial segunda que por ser una forma cuadrática su gráfica es la de una cuádrica, un cilindro o el plano $z = 0$. Si el punto es crítico y la cuádrica es un paraboloides elíptico hay extremo relativo; pero si es un paraboloides hiperbólico no hay extremo. Si es un cilindro o el plano, no se puede afirmar nada respecto de la existencia de extremo.

CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE EXISTA EXTREMO RELATIVO.

Si f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y P_0 es un punto crítico, **condición suficiente para que $f(P_0)$ sea extremo relativo** es que el

determinante **Hessiano** $H f(P_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix}$ **sea positivo**. Si $f_{xx}(P_0) > 0$ el

extremo es un **mínimo relativo** y si $f_{xx}(P_0) < 0$ es un **máximo relativo**.

Cuando el **Hessiano es negativo no hay extremo relativo** en P_0 , y si es cero puede o no, haber extremo en P_0 .

Dem.

Por el Teorema de Taylor $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - d_{P_0} f(P - P_0) - \frac{1}{2!} d_{P_0}^2 f(P - P_0)}{\|P - P_0\|^2} = 0.$

Como P_0 es crítico, $d_{P_0} f(P - P_0) = 0$ ¿Por qué?. Entonces, siendo $P - P_0 = (h, k)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(P) - f(P_0) - \frac{1}{2!} d_{P_0}^2 f(h,k)}{\|(h,k)\|^2} = 0.$$

Esto dice que si $P \approx P_0$ entonces $f(P) - f(P_0) \approx \frac{1}{2!} d_{P_0}^2 f(h,k).$

Por lo tanto $\forall P \approx P_0$, $f(P) - f(P_0)$ tiene el mismo signo que la forma diferencial 2da.

Si $\forall P \approx P_0$ la **diferencial segunda es siempre positiva**, entonces $\forall P \approx P_0$ es $f(P) > f(P_0)$ luego f **tiene un mínimo relativo** en P_0 .

Si $\forall P \approx P_0$ la **diferencial segunda es siempre negativa**, entonces $\forall P \approx P_0$ es $f(P) < f(P_0)$ luego f tiene un **máximo relativo** en P_0 .

Si por el contrario la **diferencial segunda cambia de signo en toda bola de centro P_0** , esto es: $\exists P^* \approx P_0$ tal que **diferencial 2da** en $(P^* - P_0)$ es positiva y $\exists \hat{P} \approx P_0$ tal que **diferencial 2da** en $(\hat{P} - P_0)$ es negativa, entonces:

$\exists P^* \approx P_0 : f(P^*) > f(P_0)$ y $\exists \hat{P} \approx P_0 : f(\hat{P}) < f(P_0)$, luego f no tiene extremo relativo en P_0 .

Debemos estudiar entonces la forma diferencial 2da.

$$d_{P_0}^2 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{es una forma cuadrática}$$

$$(h, k) \mapsto f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2$$

Si llamamos : $d_{P_0}^2 f(h, k) = Q(h, k)$, $f_{xx}(P_0) = a$, $f_{xy}(P_0) = b$, $f_{yy}(P_0) = c$.

Tenemos:

$$Q(h, k) = a h^2 + 2 b h k + c k^2. \quad \text{Y completando cuadrado si } a \neq 0 :$$

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= a \left(h^2 + 2 \frac{b}{a} h k + \frac{b^2}{a^2} k^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 \right) + c k^2 . \\ &= a \left(h + \frac{b}{a} k \right)^2 - \frac{b^2}{a} k^2 + c k^2 . \\ &= \frac{1}{a} (ah + bk)^2 + \frac{(ac - b^2)k^2}{a} . \\ &= \frac{1}{a} [(ah + bk)^2 + (ac - b^2)k^2] . \end{aligned}$$

Si $(ac - b^2) > 0$, $Q(h, k)$ va a ser siempre *positiva* o siempre *negativa* según sea $a > 0$ o $a < 0$.

Por eso cuando $\overbrace{f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}(P_0)^2}^{Hf(P_0)} > 0$, $d_{P_0}^2 f(h, k)$ es siempre positiva si $f_{xx}(P_0) > 0$ o siempre negativa si $f_{xx}(P_0) < 0$, como queríamos probar.

En cambio si $(ac - b^2) < 0$, es decir si $Hf(P_0) < 0$, habrá vectores (h, k) para los cuales $Q(h, k) > 0$ y vectores (h', k') para los cuales $Q(h', k') < 0$ por lo que $d_{P_0}^2 f$ tomará valores positivos y negativos y entonces no habrá extremos.

La gráfica de $Q(h, k)$ es la de un paraboloide elíptico si $(ac - b^2) > 0$ y es un paraboloide hiperbólico si $(ac - b^2) < 0$.

Si $Hf(P_0) = 0$ puede haber extremo como es el caso de $f(x, y) = x^2$; pero puede ser que no haya extremo como en el caso $f(x, y) = x^3$.

Ejercicios:

Estudiar los extremos relativos de :

- $z = x^3 - xy + y^2 - 5y$.
- $f(x, y) = x^2 - \ln(x+y) + y - 1$, definida en $D = \{(x, y) | x+y > 0\}$.
- $z = 2 \operatorname{sen}^2(x+y) - x^2 + y^2 - \pi y$.
- $z = 2 \cos^2(x+y) - x^2 - xy$.

EXTREMOS LIGADOS (o Condicionados).
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con la condición de vínculo $g(x, y, z) = 0$ (1)
 $(x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z)$

Si g es continuamente diferenciable y en $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es $g(P_0) = 0$ y $g_z(P_0) \neq 0$, entonces la ecuación (1) define implícitamente a $z(x, y)$ como función diferenciable de x e y .

Decimos que la función f con la condición de vínculo (1) tiene en P_0 un extremo relativo ligado si $\varphi(x, y) = f(x, y, z(x, y))$ tiene en (x_0, y_0) un extremo relativo, donde $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Queremos determinar condiciones necesarias para que f con la condición $g(x, y, z) = 0$ tenga en P_0 un extremo relativo.

Supongamos f diferenciable y sea $f(P_0)$ un extremo relativo de f con la condición (1). Entonces φ tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) .

Por lo tanto $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ y $\varphi_y(x_0, y_0) = 0$

$$\therefore (*) \begin{cases} f_x(P_0) + f_z(P_0) z_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(P_0) + f_z(P_0) z_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Como la ecuación (1) define a $z(x, y)$ diferenciable:

$$g_x(P_0) + g_z(P_0) z_x(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow z_x(x_0, y_0) = -\frac{g_x(P_0)}{g_z(P_0)}$$

$$g_y(P_0) + g_z(P_0) z_y(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow z_y(x_0, y_0) = -\frac{g_y(P_0)}{g_z(P_0)}$$

\therefore reemplazando en (*)

$$f_x(P_0) - \frac{f_x(P_0)}{g_z(P_0)} g_x(P_0) = 0$$

$$f_y(P_0) - \frac{f_y(P_0)}{g_z(P_0)} g_y(P_0) = 0 \quad \text{y también vale obviamente:}$$

$$f_z(P_0) - \frac{f_z(P_0)}{g_z(P_0)} g_z(P_0) = 0.$$

$$f_x(P_0) = \lambda g_x(P_0)$$

$$f_y(P_0) = \lambda g_y(P_0)$$

$$f_z(P_0) = \lambda g_z(P_0)$$

Si llamamos $\lambda = \frac{f_z(P_0)}{g_z(P_0)}$, podemos escribir:

Entonces $\vec{\nabla} f(P_0) = \lambda \vec{\nabla} g(P_0)$. Por lo tanto:

Condición necesaria para que la función f con la condición de vínculo $g(x, y, z) = 0$ tenga en P_0 un extremo ligado es que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la función

$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ tenga $\vec{\nabla} L(P_0) = \vec{0}$. Es decir que P_0 sea punto crítico de L .

La función L se llama función de Lagrange y λ se llama un multiplicador de Lagrange.

Para determinar P_0 a partir de la función de Lagrange, tenemos que resolver el sistema :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} L(P) = \vec{0} \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(P) + \lambda g_x(P) = 0 \\ f_y(P) + \lambda g_y(P) = 0 \\ f_z(P) + \lambda g_z(P) = 0 \\ g(P) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema de cuatro ecuaciones} \\ \text{en las incógnitas } x, y, z, \lambda. \end{array}$$

Ejemplo:

Determinar los puntos críticos de $f(x, y, z) = x + y + z$ con la condición de vínculo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Formemos la función de Lagrange: $L(x, y, z) = (x + y + z) + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

$$L_x(x, y, z) = 1 + 2x\lambda = 0$$

$$L_y(x, y, z) = 1 + 2y\lambda = 0$$

$$L_z(x, y, z) = 1 + 2z\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2z} \quad \therefore x = y = z = -\frac{1}{2\lambda}$$

De la condición de vínculo $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$: $3 \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad \therefore \lambda^2 = \frac{3}{4}$

$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Con lo que obtenemos dos puntos críticos para f con la condición de vínculo.

$$P_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ y } P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \blacksquare$$

Si hay dos condiciones de vínculo:

$g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, que definen implícitamente a $y(x)$ y a $z(x)$:

Para que, en el punto P_0 , f tenga un extremo ligado es condición necesaria que existan dos multiplicadores de Lagrange de manera que :

$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu g_2(x, y, z)$ tenga gradiente $\vec{\nabla} L(P_0) = \vec{0}$.

Ejercicio: Determinar la distancia más corta del origen a la curva intersección del paraboloido $z = \frac{7}{4} - y^2 - x^2$ y el plano $x + y + z = 2$.

Como hay dos condiciones de vínculo la función de Lagrange es:

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \left(x^2 + y^2 + z - \frac{7}{4}\right) + \mu (x + y + z - 2).$$

La función f es la función distancia al origen. Por comodidad vamos a considerar el cuadrado de la distancia, teniendo en cuenta que si f tiene en P_0 un extremo que vale $a > 0$, entonces f^2 también tiene, en P_0 , un extremo igual a a^2 .

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(x^2 + y^2 + z - \frac{7}{4}\right) + \mu(x + y + z - 2).$$

$$L_x(x, y, z) = 2x + 2\lambda x + \mu = 0.$$

$$L_y(x, y, z) = 2y + 2\lambda y + \mu = 0.$$

$$L_z(x, y, z) = 2z + \lambda + \mu = 0.$$

Obtenemos un sistema de cinco ecuaciones en las incógnitas x, y, z, λ, μ .

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ 2z + \lambda + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 + z - \frac{7}{4} = 0 \\ x + y + z - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow 2(y-x) + 2\lambda(y-x) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ si } \boxed{y \neq x}$$

Reemplazando en la 1ra ecuación: $2x - 2x + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$

$\therefore z = \frac{1}{2}$. Reemplazando z en las dos ecuaciones de vínculo:

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{4}, \quad x + y = \frac{3}{2} \Rightarrow (x + y)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow 2xy = 1 \therefore x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0.$$

De donde $x = \frac{1}{2}, y = 1$ o $x = 1, y = \frac{1}{2}$. Obtenemos así los puntos críticos:

$P_1 = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ y $P_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Si $\boxed{x = y}$ se obtienen

$P_3 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $P_4 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$. El extremo se produce en

P_1 y P_2 y vale $\sqrt{\frac{3}{2}}$ porque $\sqrt{\frac{3}{2}} = d(P_1, O) = d(P_2, O) < d(P_3, O) < d(P_4, O)$.

$f(x, y(x), z(x)) = x^2 + y^2(x) + z^2(x) = \varphi(x)$.

$\varphi'(x) = 2x + 2yy' + 2zz'$.

$\varphi''(x) = 2 + 2(y')^2 + 2yy'' + 2(z')^2 + 2zz''$

$\varphi''(\frac{1}{2}) = 2 + 2(y')^2 + 2(1)y'' + 2(z')^2 + 2(\frac{1}{2})z''$

$\varphi''(\frac{1}{2}) = 2 + 2(y')^2 + 2y'' + 2(z')^2 + z''$

$= 2 > 0$. Hay extremo en P_1 y es un mínimo.

De las condiciones de vínculo en P_1 :

$$\begin{cases} 2x + 2yy' + z' = 0. \\ 1 + y' + z' = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2y' + z' = 0 \\ 1 + y' + z' = 0. \end{cases}$$

Luego $y' = 0$; $z' = -1$

$$\begin{cases} 2 + 2(y')^2 + 2yy'' + z'' = 0 \\ y'' + z'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2y'' + z'' = 0 \\ y'' + z'' = 0 \end{cases}$$

Luego $y'' = -2$; $z'' = 2$

Observación:

Los multiplicadores de Lagrange se pueden usar para facilitar la resolución del sistema formado por $\vec{\nabla}L(P_0) = \vec{0}$ y las condiciones de vínculo. Solamente sirven para determinar puntos críticos. Después se debe analizar la existencia del extremo.

INTEGRALES MÚLTIPLES

Vamos a definir la integral doble de Riemann y, de manera natural, generalizaremos el concepto para obtener la definición de integral múltiple.

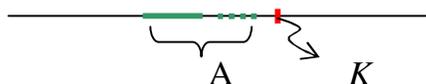
En el espacio euclidiano E^n vamos a considerar conjuntos cerrados y acotados donde estarán definidas funciones reales acotadas.

Para ello, además de las propiedades algebraicas y de orden que hay en el campo de los números reales \mathbb{R} , vamos a usar las propiedades de completación de \mathbb{R} y las propiedades topológicas que se derivan de la distancia usual en \mathbb{R} y en \mathbb{R}^n .

Conjunto Acotado en \mathbb{R}

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Un número real K se llama una cota superior de A , si $\forall x \in A, x \leq K$.



Si A tiene una cota superior, el conjunto A se dice acotado superiormente.

De la misma manera:

Un número real k se llama una cota inferior de A , si $\forall x \in A, k \leq x$.



Si A tiene una cota inferior, el conjunto A se dice acotado inferiormente.

Definición:

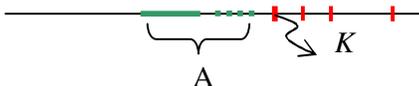
Un conjunto de números reales no vacío, es acotado si está acotado superiormente e inferiormente.

Esto es :

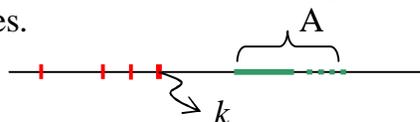
A es acotado si existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tales que $\forall x \in A$ es $a \leq x \leq b$.

Podemos decir, entonces, que : *Un conjunto de números reales no vacío, es acotado si existe un intervalo real $[a,b]$ tal que $A \subset [a,b]$.*

Observemos que si K es una cota superior de A todo número a la derecha de K también es cota superior. Por lo tanto si un conjunto está acotado superiormente tiene infinitas cotas superiores.



Lo mismo para la cota inferior. Si k es una cota inferior de A todo número a la izquierda de k también es cota inferior. Por lo tanto si un conjunto está acotado inferiormente tiene infinitas cotas inferiores.



Extremo superior

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. A acotado superiormente.

Definición

Un n° real M se llama extremo superior de A (o supremum de A o supremo de A) si

y sólo si

- 1) M es cota superior de A . ($\forall x \in A, x \leq M$)
- 2) M es la mínima cota superior. (K cota superior de $A \Rightarrow M \leq K$).

La notación para el extremo superior de A es : $\sup A$.

La siguiente proposición caracteriza al *supremum* de un conjunto.

Proposición:

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. A acotado superiormente.

$M = \sup A \Leftrightarrow$

- i) M es cota superior de A .
- ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : M - \varepsilon < x$.

Dem.

(\Rightarrow)

Sea $M = \sup A$.

Vale i) por definición de supremum.

Para probar ii), sea $\varepsilon > 0$. Como $M - \varepsilon < M$ y M es la mínima cota superior, $M - \varepsilon$ no puede ser cota superior de A . Luego $\exists x \in A : M - \varepsilon < x$. *q.e.d.*

(\Leftarrow)

Razonando por el absurdo, supongamos que valen: i) M es cota superior de A y ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : M - \varepsilon < x$; pero que $M \neq \sup A$.

Entonces $\exists K$ cota superior de A tal que $K < M$. (*)

$K < M \Rightarrow M - K > 0$

Llamemos $M - K = \varepsilon > 0$. Por hipótesis ii) $\exists x \in A : \underbrace{M - \varepsilon}_K < x$.

Luego $\exists x \in A : K < x$. Esto dice K no es cota superior de A , en contra de (*).

La contradicción provino de haber supuesto $M \neq \sup A$. Por lo tanto, si valen i) y ii) debe ser $M = \sup A$. *q.e.d.* ■

Vamos a aceptar como axioma la siguiente proposición llamada *Principio del supremum*.

Principio del supremum.

Todo conjunto de números reales, no vacío y acotado superiormente tiene supremum.

De manera similar, se define el extremo inferior de una conjunto de números reales acotado inferiormente.

Extremo inferior

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. A acotado inferiormente.

Definición

Un n° real m se llama extremo inferior de A (o ínfimum de A o ínfimo de A) si y sólo si

- 1) m es cota inferior de A . ($\forall x \in A, m \leq x$)
- 2) m es la máxima cota inferior. (k cota inferior de $A \Rightarrow k \leq m$).

La notación para el extremo inferior de A es : $\inf A$.

La siguiente proposición caracteriza al *ínfimum* de un conjunto.

Proposición:

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A acotado inferiormente.

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{array}{l} i) m \text{ es cota inferior de } A. \\ ii) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < m + \varepsilon. \end{array}$$

La demostración se deja como ejercicio, y también la prueba de la unicidad del supremum y del ínfimum, cuando existen.

El *Principio del supremum* es equivalente a la proposición: “*Todo conjunto de números reales, no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimum*”.

Esto es: Si vale el *Principio del supremum* entonces se puede probar que “*Todo conjunto de números reales, no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimum*”. Y recíprocamente, si suponemos válida la proposición entonces se puede probar el *Principio del supremum*.

Conjunto acotado en \mathbb{R}^n .

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$.

B es acotado $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \{ d(P,Q) \in \mathbb{R} / P, Q \in B \} \subset \mathbb{R}$ es acotado.

Esto es lo mismo que decir: B es acotado sii $\exists k > 0 : \forall P, Q \in B, \|P - Q\| < k$.

Rectángulo coordinado en \mathbb{R}^n .

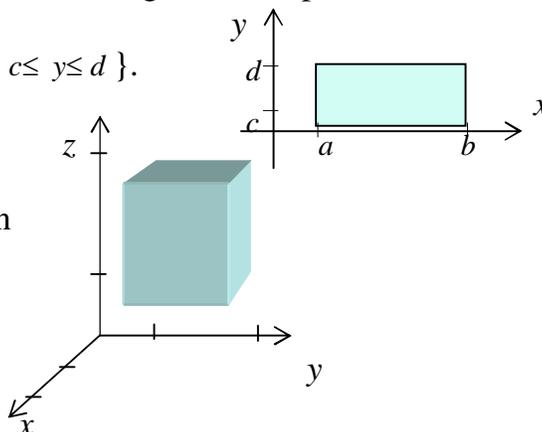
$R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo coordinado si $R = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mid \forall i = 1, \dots, n \ a_i < x_i < b_i\}$ donde $\forall i = 1, \dots, n \ a_i, b_i \in \mathbb{R}, b_i > a_i$.

Esto es: $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Un rectángulo coordinado en \mathbb{R} es un segmento.

Si $n = 2$, un rectángulo coordenado es un rectángulo en el plano, de lados paralelos a los ejes coordenados.

Con notación clásica $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.



Si $n = 3$, un rectángulo coordenado es un paralelepípedo en el espacio, de caras paralelas a los planos coordenados.

Para $n = 1$ se define la longitud de $R = [a, b]$, $l(R) = b - a$.

Para $n = 2$ se define el área de $R = [a, b] \times [c, d]$, $A(R) = (b - a)(d - c)$.

Y para $n = 3$ se define el volumen de $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$,

$V(R) = (b - a)(d - c)(f - e)$.

La siguiente proposición es una consecuencia de las definiciones y se deja como ejercicio para las clases prácticas:

Proposición

$B \subset \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$.

B es acotado $\Leftrightarrow \exists R \subset \mathbb{R}^n$, rectángulo coordenado tal que $B \subset R$.

Función acotada.

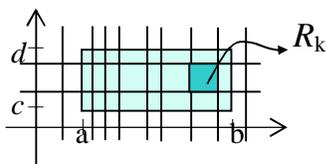
$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f \text{ es acotada} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{f(P) \mid P \in D\} \subset \mathbb{R} \text{ es acotado.}$
--

Podemos decir que f es acotada sii $\exists k \in \mathbb{R}, k > 0 : \forall P \in D \quad |f(P)| \leq k$.

Definición de integral doble.

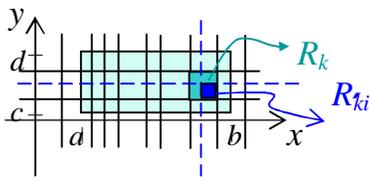
Sean $R \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo coordenado y $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

No pedimos otras hipótesis para f . (como continuidad etc.)



Paralelas a los ejes coordenados dividen a R en sub-rectángulos parciales.

Si de esta manera dividimos a R en n rectángulos coordenados $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_n$, decimos que hemos efectuado una partición π del rectángulo R . Los rectángulos R_k se denominan sub-rectángulos de la partición π .



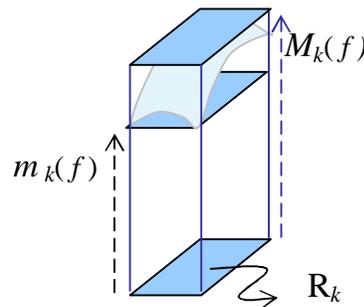
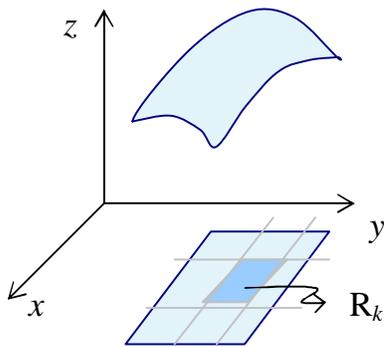
Efectuada la partición π de R , diremos que otra partición π' de R es más fina que π , o que es posterior a π , si cada sub-rectángulo de π' está contenido en un sub-rectángulo de π .

Observación: Una partición π' más fina que π se obtiene agregando nuevas paralelas a las que determinan π .

Sea, entonces, π una partición de R en n rectángulos $R_1, \dots, R_k, \dots, R_n$. Para cada sub-rectángulo R_k , sea :

$$M_k(f) = \sup \{ f(P) \mid P \in R_k \} \text{ y}$$

$$m_k(f) = \inf \{ f(P) \mid P \in R_k \}. \quad \text{Estos números siempre existen. ¿Por qué?}$$



Llamamos suma superior de Riemann correspondiente a la partición π a :

$$\bar{S}(f, \pi) = \sum_{k=1}^n M_k(f) A(R_k).$$

Y suma inferior de Riemann correspondiente a la partición π a :

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{k=1}^n m_k(f) A(R_k). \quad \text{Estos números siempre existen.}$$

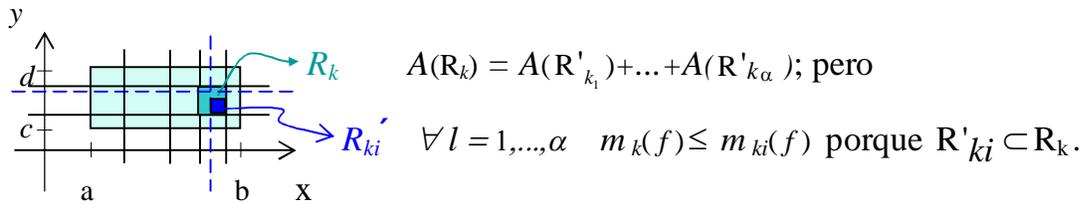
Es evidente que para cada partición π , $\underline{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi)$; pero también es cierto una afirmación más fuerte:

Proposición:

Si π y π' son particiones de R y π' es más fina que π , entonces:

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi') \leq \bar{S}(f, \pi') \leq \bar{S}(f, \pi).$$

No daremos la demostración en detalle. Sólo observamos que como $\underline{S}(f, \pi) = m_1(f) A(R_1) + \dots + m_k(f) A(R_k) + \dots + m_n(f) A(R_n)$, cada sub-rectángulo R_k de π se divide en varios sub-rectángulos de π' , de manera que



Luego $m_k(f) A(R_k) = m_k(f) (A(R'_{k_1}) + \dots + A(R'_{k_\alpha}))$
 $\leq m_{k_1}(f) A(R'_{k_1}) + \dots + m_{k_\alpha}(f) A(R'_{k_\alpha})$.
 $\therefore \underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi')$. De manera similar se muestra $\bar{S}(f, \pi') \leq \bar{S}(f, \pi)$.q.e.d.

Se sigue que también vale:

Si π'' es más fina que π y π' entonces: $\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi'') \leq \bar{S}(f, \pi'') \leq \bar{S}(f, \pi')$
 Esto nos permite afirmar que cualquier suma superior es mayor o igual que cualquier suma inferior y por lo tanto:

$$\sup_{\pi} \{ \underline{S}(f, \pi) \} \leq \inf_{\pi} \{ \bar{S}(f, \pi) \}$$

Definición

La función acotada $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R , en el sentido de Riemann, si y sólo si:

$$\sup_{\pi} \{ \underline{S}(f, \pi) \} = \inf_{\pi} \{ \bar{S}(f, \pi) \} = I \quad \text{--- } n^\circ \text{ real}$$

Si la función f es integrable en R , el n° real I se llama la integral de f en R y se denota: $\iint_R f$.

Otras notaciones son : $\iint_R f \, dA$, $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$.

Vamos a dar dos ejemplos de funciones acotadas. Una integrable y la otra no.

Ejemplo 1: Para cada partición π de R y cada sub-rectángulo R_k es $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $m_k(f) = M_k(f) = c$.
 $P \mapsto f(P) = c$ De modo que $\forall \pi \quad \underline{S}(f, \pi) = \bar{S}(f, \pi) = \sum_k c A(R_k)$
 $\therefore \iint_R f \, dA = c A(R)$.

Ejemplo 2: Para cada partición π de R , cada sub-rectángulo R_k tiene pto con x racional y pto con x irracional de modo que $\forall \pi$ y $\forall R_k$ $m_k(f) = 0$ y $M_k(f) = 1$. Luego: $\underline{S}(f, \pi) = 0$
 $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$

$$\bar{S}(f, \pi) = \sum_k A(R_k) = A(R) \text{ entonces } \sup_{\pi} \{ \underline{S}(f, \pi) \} = 0 \text{ e } \inf_{\pi} \{ \bar{S}(f, \pi) \} = A(R)$$

por lo tanto f no es integrable.

Un criterio útil de integrabilidad es el siguiente.

Teorema

Una función acotada $f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sii $\forall \varepsilon > 0 \exists \pi$, partición de \mathbb{R} tal que $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$.

Dem.

Probamos primero:

$$f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrable} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \pi, \text{partición de } \mathbb{R} : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Sea entonces f integrable y $\varepsilon > 0$, (por lo tanto $\frac{\varepsilon}{2} > 0$).

Por hipótesis $\sup\{\underline{S}(f, \pi)\} = \inf\{\bar{S}(f, \pi)\} = I$. Entonces, para $\frac{\varepsilon}{2}$ existen particiones π' y π'' tales que $I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, \pi')$ y $\bar{S}(f, \pi'') < I + \frac{\varepsilon}{2}$. ¿Por qué?

Eligiendo π más fina que π' y π'' , resulta :

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, \pi') \leq \underline{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi'') < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo que $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < (I + \frac{\varepsilon}{2}) - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$. *Q.E.D.*

En el otro sentido:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \pi, \text{partición de } \mathbb{R} : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon \Rightarrow f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrable.}$$

Siempre vale: $\underline{S}(f, \pi) \leq \sup\{\underline{S}(f, \pi)\} \leq \inf\{\bar{S}(f, \pi)\} \leq \bar{S}(f, \pi)$.

Razonando por el absurdo, supongamos que vale la hipótesis; pero f no es integrable.

En ese caso $\inf\{\bar{S}(f, \pi)\} \neq \sup\{\underline{S}(f, \pi)\}$. $\therefore \inf\{\bar{S}(f, \pi)\} - \sup\{\underline{S}(f, \pi)\} = \varepsilon > 0$.

Por hipótesis existe π , partición de \mathbb{R} talque $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$. Entonces:

$$\varepsilon = \inf\{\bar{S}(f, \pi)\} - \sup\{\underline{S}(f, \pi)\} \leq \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon. \text{ ¡Contradicción!}$$

Este criterio sirve para probar:

Resultado importante:

$$f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \Rightarrow f \text{ integrable en } \mathbb{R}.$$

Las funciones continuas en conjuntos C cerrados y acotados tienen propiedades agradables, como por ejemplo: Si f es continua en C , entonces:

- 1) f es acotada.
- 2) f alcanza en C el supremum M y el infimum m . (Esto es: $\exists P^*$ y \hat{P} tal que $f(P^*) = M$ y $f(\hat{P}) = m$. Además, si C es conexo, f toma todos los valores entre m y M .)
- 3) f es uniformemente continua en C .

Definición: f es uniformemente continua en C sii $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que
 $\forall P, Q \in C \quad (\|P - Q\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon).$

Usando estas propiedades de las funciones continuas, que aceptamos sin demostración, probaremos :

$f: R \subset R^2 \rightarrow R$ continua $\Rightarrow f$ integrable en R .

Dem.

Sea $\varepsilon > 0$, por lo tanto $\frac{\varepsilon}{A(R)} = \varepsilon' > 0$.

Como f es uniformemente continua en $R \exists \delta(\varepsilon') > 0 : (\|P - Q\| < \delta(\varepsilon') \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon')$.

Siempre podemos elegir una partición π de R en n sub-rectángulos R_k con $k=1, \dots, n$ tomando n suficientemente grande, de manera que $\forall k$ y $\forall P_k, Q_k \in R_k$ sea $\|P_k - Q_k\| < \delta(\varepsilon')$.

$\forall k=1, \dots, n$ f es continua en $R_k \therefore \exists P_k^*$ y $\hat{P}_k \in R_k$ tales que $M_k(f) = f(P_k^*)$ y $m_k(f) = f(\hat{P}_k)$.

Y como $\forall k \quad R_k \subset R$, por la continuidad uniforme

$\|P_k^* - \hat{P}_k\| < \delta(\varepsilon') \Rightarrow |f(P_k^*) - f(\hat{P}_k)| = M_k(f) - m_k(f) < \varepsilon'$.

$\forall k, M_k(f) A(R_k) - m_k(f) A(R_k) < \varepsilon' A(R_k)$

$$\therefore \underbrace{\sum_{k=1}^n M_k(f) A(R_k)}_{\bar{S}(f, \pi)} - \underbrace{\sum_{k=1}^n m_k(f) A(R_k)}_{\underline{S}(f, \pi)} < \varepsilon' A(R) = \varepsilon$$

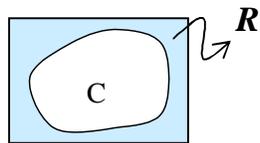
Hemos probado que $\forall \varepsilon > 0 \exists \pi$, partición de $R : \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$.

Esto dice : f integrable en R , Q.E.D.

Nos interesa ver ahora, cuándo una función acotada es integrable en conjuntos que no sean rectángulos.

Sea C un conjunto cerrado y acotado en R^2 y $f: C \subset R^2 \rightarrow R$ una función acotada.

Como C es acotado $\exists R$, rectángulo coordenado en R^2 tal que $C \subset R \subset R^2$.



Definimos en $R \quad f^*: R \subset R^2 \rightarrow R$

$$P \mapsto \begin{cases} f(P) & \text{si } P \in C \\ 0 & \text{si } P \notin C \end{cases}$$

Como f es acotada en C , resulta f^* acotada en R .

Definición

Decimos que f es integrable en C sii f^* es integrable en R , y denotamos:

$$\iint_C f \, dA = \iint_R f^* \, dA.$$

Si $f \equiv 1$ en C , f^* es la función característica de C , y si esta función es integrable en \mathbf{R} , por definición es $\iint_C dA = A(C)$. Área de C , o contenido de C .

Se observa que si C es un rectángulo $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$,
 $\iint_{\mathbf{R}} dA = A(\mathbf{R}) = (b-a)(d-c)$.

Se puede mostrar que un subconjunto acotado $C \subset \mathbf{R}^2$ tiene área nula (o contenido cero), esto es $\iint_C dA = A(C) = 0$, si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe un cubrimiento finito

de C , por rectángulos cerrados $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ tal que $\sum_{k=1}^n A(R_k) < \varepsilon$. Esto es lo que enunciamos en la siguiente proposición, cuya demostración se deja como ejercicio para las clases prácticas.

Proposición

Sea $C \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto acotado.

$\iint_C dA = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_n$, rectángulos coordenados tales que

$$\bigcup_{k=1}^n R_k \supset C \text{ y } \sum_{k=1}^n A(R_k) < \varepsilon.$$

Además, se puede mostrar que si la frontera de C , ∂C , tiene área nula, la función característica de C , que se denota χ_C , es integrable en cualquier rectángulo que contenga a C . Esto es:

$$\iint_{\partial C} dA = 0 \implies \iint_C dA = A(C).$$

También vale el siguiente resultado que enunciamos y no damos la demostración:

Si C es un conjunto acotado cuya frontera tiene área nula y f es continua en C , salvo en un subcjo de área nula $B \subset C$, entonces f es integrable en C .

Todo lo dicho para integrales dobles sirve para definir integrales simples (de una variable), integrales triples y en general integrales de orden de orden n .

En \mathbf{R}^1 un rectángulo coordenado \mathbf{R} es un intervalo real $I = [a, b]$, y una partición π consiste en dividir $[a, b]$ en n intervalos mediante puntos $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$.

Las funciones que se consideran son $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ acotadas y vale la misma definición de integral. El símbolo es $\int_{[a, b]} f dx$. Y si $f \equiv 1$ es $\int_{[a, b]} dx = \text{long}(\mathbf{R}) = (b-a)$.

En \mathbf{R}^3 un rectángulo coordenado \mathbf{R} es un paralelepípedo y una partición π de \mathbf{R} se obtiene trazando planos paralelos a lo planos coordenados.

La notación para integrales triples de funciones $f: \mathbf{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es: $\iiint_{\mathbf{R}} f dV$ o $\iiint_{\mathbf{R}} f dx dy dz$. Y si $f \equiv 1$, $\iiint_{\mathbf{R}} dV = V(\mathbf{R})$.

Si $\mathbf{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 1 \leq z \leq 0\}$, $\iiint_{\mathbf{R}} dV = (b-a)(d-c)(1-0)$.

Observar que si $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2$, $\iint_{\mathbf{R}} 1 dA = \iint_{\mathbf{R}} dA = A(\mathbf{R}) = (b-a)(d-c) = V(\mathbf{R})$.

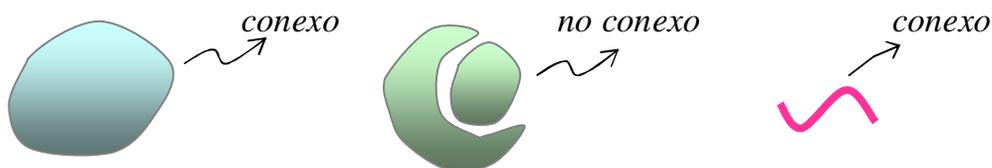
Esto es: $\iint_{\mathbf{R}} dA$ es el área del rectángulo $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2$ y también es el volumen de un paralelepípedo $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^3$ de base \mathbf{R} y altura 1.



Definición:

En este curso vamos a decir que un conjunto es conexo si es arco-conexo. Esto es: Decimos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si $\forall P, Q \in C$, \exists una curva $\widehat{PQ} \subset C$.

Ejemplos



Definición:

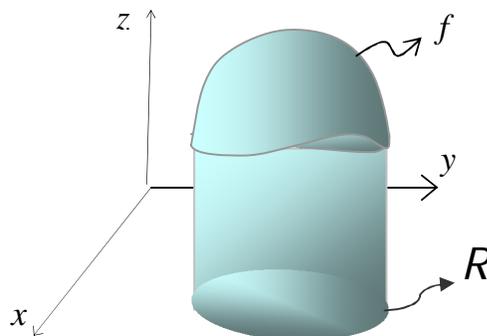
$R \subset \mathbb{R}^n$ es una región si es la unión de un abierto conexo con parte de su frontera.



Interpretación geométrica de la integral doble.

Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada y $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa en \mathbb{R}^2 . Entonces f es integrable y el valor de la integral es, por definición, el volumen V del sólido en \mathbb{R}^3 limitado superiormente por la gráfica de f e inferiormente por la región plana R .

$$\iint_R f dA = V$$



PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES.

1) Propiedad de linealidad.

Sean $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en R , R región cerrada y acotada, y sean $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces $af + bg$ es integrable y
$$\iint_R (af + bg) dA = a \iint_R f dA + b \iint_R g dA .$$

2) Propiedad de monotonía

Si f y g son integrables en R entonces:
$$\forall P \in R \quad f(P) \geq g(P) \Rightarrow \iint_R f dA \geq \iint_R g dA .$$

3) Propiedad de sumabilidad respecto de la región de integración.

Sean las regiones $R_1, R_2, R \subset \mathbb{R}^2$ cerradas y acotadas, tales que $R = R_1 \cup R_2$ con

$R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Y sea f integrable en R . Entonces:
$$\iint_R f dA = \iint_{R_1} f dA + \iint_{R_2} f dA .$$

Dem.

1) Propiedad de linealidad.

Como R es acotada existe R , rectángulo coordenado tal que $R \subset R$ y si f es integrable entonces $\iint_R f dA = \iint_R f^* dA$.

Por lo tanto es suficiente probar las propiedades cuando la región de integración es un rectángulo coordenado R .

Probemos que $(af + bg)$ es integrable en R , sabiendo que f y g son integrables en R .

Basta probar que $f + g$ y que af son integrables. ¿Por qué ?

Demostración

Para cualquier partición π de R vale :

$$\underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi) \leq \underline{S}((f + g), \pi) \leq \bar{S}((f + g), \pi) \leq \bar{S}(f, \pi) + \bar{S}(g, \pi).$$

$$\text{Entonces : } \bar{S}((f + g), \pi) - \underline{S}((f + g), \pi) \leq (\bar{S}(f, \pi) + \bar{S}(g, \pi)) - (\underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi)).$$

$$\bar{S}((f + g), \pi) - \underline{S}((f + g), \pi) \leq (\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi)) + (\bar{S}(g, \pi) - \underline{S}(g, \pi)) . \quad (*)$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son integrables, para $\frac{\varepsilon}{2}$ existen particiones π' y π'' tales que:

$$\bar{S}(f, \pi') - \underline{S}(f, \pi') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \bar{S}(g, \pi'') - \underline{S}(g, \pi'') < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Si π es más fina que π' y π'' , de (*), resulta $\bar{S}((f + g), \pi) - \underline{S}((f + g), \pi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

y por lo tanto $f + g$ integrable.

Falta ver que la integral de la suma es la suma de las integrales.

Llamemos I, I_1, I_2 a las integrales de $f+g, f$ y g respectivamente.

Sea $\varepsilon > 0$. Como I_1 e I_2 son supremos de sumas inferiores, Existen particiones π_1 y

$$\pi_2 \text{ de } \mathbb{R} \text{ tales que } I_1 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, \pi_1), I_2 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(g, \pi_2)$$

Si π es más fina que π_1 y π_2 , es: $I_1 + I_2 - \varepsilon < \underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi) \leq \underline{S}(f+g, \pi)$

Luego $\forall \varepsilon > 0 \exists \pi$ partición de \mathbb{R} tal que $(I_1 + I_2) - \varepsilon < \underline{S}(f+g, \pi)$.

Esto dice que $(I_1 + I_2) = I = \sup \{ \underline{S}(f+g, \pi) \}$, como queríamos probar.

Para probar af integrable, supongamos primero que $a > 0$.

Cualquiera sea la partición π , vale :

$$\underline{S}(af, \pi) = a \underline{S}(f, \pi) \leq a \bar{S}(f, \pi) = \bar{S}(af, \pi).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es integrable, para $\frac{\varepsilon}{a}$ existe π tal que $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \frac{\varepsilon}{a}$.

Entonces : $a \bar{S}(f, \pi) - a \underline{S}(f, \pi) < a \cdot \frac{\varepsilon}{a} \therefore \bar{S}(af, \pi) - \underline{S}(af, \pi) < \varepsilon$.

Por lo que si $a > 0$ y f integrable es af integrable.

Si $a < 0$ $\underline{S}(af, \pi) = a \bar{S}(f, \pi)$ y $\bar{S}(af, \pi) = a \underline{S}(f, \pi)$.

Por lo tanto si $\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{(-a)} > 0$. Entonces:

$$\bar{S}(af, \pi) - \underline{S}(af, \pi) = a \underline{S}(f, \pi) - a \bar{S}(f, \pi) = (-a) (\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi)) < (-a) \frac{\varepsilon}{(-a)} = \varepsilon. \blacksquare$$

2) Propiedad de monotonía.

Supongamos f y g integrables en un rectángulo R y $\forall P \in R \ f(P) \geq g(P)$.

$\therefore (*) \ \boxed{\forall P \in R \ f(P) - g(P) \geq 0}$ y como $f-g$ es integrable en R ,

$$\iint_R (f-g) dA = \iint_R f dA - \iint_R g dA.$$

Por (*), para cualquier partición π de R vale :

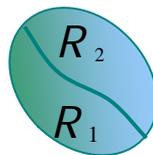
$$0 \leq \underline{S}(f-g, \pi) \leq \sup \underline{S}(f-g, \pi) = \inf \bar{S}(f-g, \pi) = \iint_R (f-g) dA$$

$$\therefore \iint_R (f-g) dA \geq 0 \Rightarrow \iint_R f dA - \iint_R g dA \geq 0 \Rightarrow \iint_R f dA \geq \iint_R g dA. \blacksquare$$

3) Propiedad de sumabilidad respecto de la región de integración.

Sean las regiones $R_1, R_2, R \subset \mathbb{R}^2$ acotadas,

tales que $R = R_1 \cup R_2$ con $R_1^\circ \cap R_2^\circ = \emptyset$.



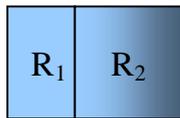
Entonces:

f integrable en $R \Leftrightarrow f$ integrable en R_1 y en R_2

y vale
$$\iint_R f \, dA = \iint_{R_1} f \, dA + \iint_{R_2} f \, dA .$$

La prueba es inmediata si las regiones son rectángulos coordenados.

En efecto, supongamos $R = R_1 \cup R_2$



Sea f integrable en R . Entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe una partición π de R en n sub-rectángulos (suficientemente fina, de manera que n_1 sub-rectángulos R'_k cubran R_1 y n_2 sub-rectángulos R''_k cubran R_2

donde $n = n_1 + n_2$) tal que : $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) &= \sum_{k=1}^{n_1} [M_k(f) - m_k(f)] A(R'_k) + \sum_{k=n_1+1}^n [M_k(f) - m_k(f)] A(R''_k) \\ &= \underbrace{\bar{S}(f_1, \pi_1) - \underline{S}(f_1, \pi_1)}_{(1) > 0} + \underbrace{\bar{S}(f_2, \pi_2) - \underline{S}(f_2, \pi_2)}_{(2) > 0} < \varepsilon \quad (*) \end{aligned}$$

Donde f_1 es la restricción de f a R_1 y f_2 la restricción de f a R_2 .

De (*) se sigue que $(1) < \varepsilon$ y $(2) < \varepsilon$. Esto dice f integrable en R_1 y en R_2 .

Y vale
$$\iint_R f \, dA = \iint_{R_1} f \, dA + \iint_{R_2} f \, dA.$$

Recíprocamente . Sea $\varepsilon > 0$. Si suponemos que f es integrable en R_1 y en R_2 , para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existen particiones : π_1 de R_1 y π_2 de R_2 tales que $(1) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $(2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

La unión $\pi_1 \cup \pi_2$ es una partición π de R tal que

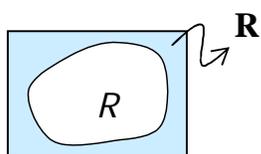
$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Esto dice f es integrable en R , como queríamos probar.

Vamos a ver ahora una forma alternativa de definir el concepto de función integrable. Para ello damos la siguiente definición:

Sea $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en R conjunto acotado

Como R es acotado $\exists R$, rectángulo coordenado en \mathbb{R}^2 tal que $R \subset R \subset \mathbb{R}^2$.



Definimos en R $f^*: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \mapsto \begin{cases} f(P) & \text{si } P \in R \\ 0 & \text{si } P \notin R \end{cases}$$

Como f es acotada en R , resulta f^* acotada en R .

Sea π una partición de R en n sub rectángulos parciales $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_n$.

$\forall k = 1, \dots, n$ llamamos **diámetro de R_k** a $d_k =$ máximo de las distancias entre puntos de R_k .
 d_k es la longitud de la diagonal del rectángulo R_k .

y definimos como **norma de la partición π** al máximo de los diámetros d_k .

$\eta(\pi) = \text{máx}\{d_k \mid k = 1, \dots, n\}$ En cada sub rectángulo R_k elijamos un punto cualquiera P_k y formemos el producto $f(P_k) A(R_k)$.

La suma $\sum_{k=1}^n f^*(P_k) A(R_k)$, se llama *una suma de Riemann asociada a la partición π* .

Observamos que cada suma de Riemann depende de la partición π y del punto P_k elegido en cada sub rectángulo R_k .

Definimos “límite de las sumas de Riemann” así :

Si existe un número real I , al que se aproximan todas las sumas de Riemann asociadas a particiones π de normas $\eta(\pi)$ que tienden a cero cuando n crece, decimos que las sumas de Riemann tienen límite I .

(n es el número de subrectángulos R_k)

Si las sumas de Riemann tienen límite I , escribimos :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \eta(\pi) \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f^*(P_k) A(R_k) = I.$$

El significado preciso de este límite es el siguiente:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \eta(\pi) \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f^*(P_k) A(R_k) = I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ y } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall \pi \text{ de norma } \eta(\pi) < \delta(\varepsilon) \text{ cdo } n \geq n_0$$

y toda suma de Riemann $\sum_{k=1}^n f^*(P_k) A(R_k)$ asociada a π es

$$\left| \sum_{k=1}^n f^*(P_k) A(R_k) - I \right| < \varepsilon.$$

Una condición necesaria y suficiente para que una función acotada en un rectángulo sea integrable la da el teorema de Darboux, que enunciamos, sin demostración.

Teorema de Darboux

Sean $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, R rectángulo de \mathbb{R}^2 , I número real.

$$f \text{ es integrable Riemann y } \iint_R f \, dA = I \Leftrightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \eta(\pi) \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(P_k) A(R_k) = I.$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Antes de enunciar el teorema, vamos a señalar las propiedades de las funciones continuas definidas en regiones cerradas y acotadas que tendremos en cuenta en la demostración del teorema.

1. Toda función continua f definida en un conjunto R cerrado y acotado alcanza el mínimo absoluto m y el máximo absoluto M . Esto es:
 $\exists \tilde{P} \in R : \forall P \in R \quad f(P) \geq f(\tilde{P}) = m$ y
 $\exists \hat{P} \in R : \forall P \in R \quad f(P) \leq f(\hat{P}) = M$.
2. Si R es una región (conexo con interior no vacío) cerrada y acotada, la función continua f toma todos los valores comprendidos entre m y M . Esto es:
 $\forall \mu \in [m, M], \exists P^* \in R : f(P^*) = \mu$.

Teorema V.M.C.I.

Sea R una región cerrada y acotada, $f: R \subset R^2 \rightarrow R$ y $g: R \subset R^2 \rightarrow R$ continuas y $\forall P \in R \quad g(P) \geq 0$. Entonces existe un número real μ entre el mínimo absoluto m y el máximo absoluto M de f en R tal que $\iint_R f(P)g(P) dA = \mu \iint_R g(P) dA$.

Dem.

Por la propiedad 1. existen $m = \min\{f(P) \mid P \in R\}$ y $M = \max\{f(P) \mid P \in R\}$ y vale:

$$\forall P \in R \quad m \leq f(P) \leq M .$$

Como por hipótesis g es no negativa en R ,

tenemos:

$$\forall P \in R \quad m g(P) \leq f(P) g(P) \leq M g(P). \quad \begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ son integrables por ser continuas en una} \\ \text{región cerrada y acotada, además por la mono} \\ \text{tonía y linealidad de la integral podemos escribir:} \end{array}$$

$$\iint_R m g(P) dA \leq \iint_R f(P)g(P) dA \leq \iint_R M g(P) dA .$$

$$m \iint_R g(P) dA \leq \iint_R f(P)g(P) dA \leq M \iint_R g(P) dA. \quad (1)$$

$$\forall P \in R \quad g(P) \geq 0 \Rightarrow \iint_R g(P) dA \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a) \iint_R g(P) dA > 0 \\ b) \iint_R g(P) dA = 0 \end{cases}$$

Si vale $a)$ podemos dividir en (1) y obtenemos $m \leq \frac{\iint_R f(P)g(P) dA}{\iint_R g(P) dA} \leq M$.

Si llamamos $\mu = \frac{\iint_R f(P)g(P) dA}{\iint_R g(P) dA}$ obtenemos $\iint_R f(P)g(P) dA = \mu \iint_R g(P) dA$, que es la tesis.

Si vale $b)$, reemplazando en (1) tenemos:

$$0 \leq \iint_{\mathbb{R}} f(P)g(P)dA \leq 0 \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}} f(P)g(P)dA = 0$$

∴ eligiendo como valor de μ a cualquier número entre m y M , obtenemos nuevamente la tesis.

$$\iint_{\mathbb{R}} f(P)g(P)dA = \mu \underbrace{\iint_{\mathbb{R}} g(P) dA}_0 \quad \blacksquare \quad Q.E.D.$$

Interpretación geométrica de un caso particular del T.V.M.C.I.

Sea $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa en \mathbb{R} , región cerrada y acotada y $g \equiv 1$ en \mathbb{R} .

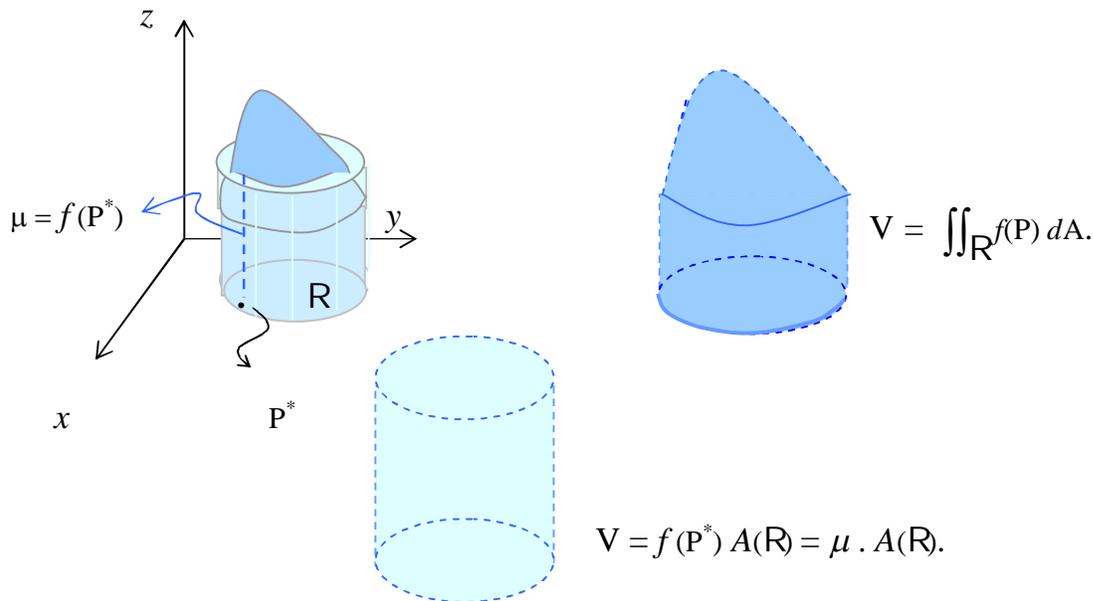
El T.V.M.C.I dice que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\iint_{\mathbb{R}} f(P) dA = \mu \iint_{\mathbb{R}} dA$. Con $m \leq \mu \leq M$

Como f es continua en \mathbb{R} que es conexo por ser región, toma todos los valores comprendidos entre m y M . Hay entonces un punto en \mathbb{R} donde f asume el valor μ . Esto es: $\exists P^* \in \mathbb{R}: \mu = f(P^*)$. Por otra parte $\iint_{\mathbb{R}} dA = A(\mathbb{R})$.

Luego podemos escribir: $\exists P^* \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{\iint_{\mathbb{R}} f(P) dA = f(P^*) \cdot A(\mathbb{R})}$.

El 1er miembro de esta igualdad es $\iint_{\mathbb{R}} f(P) dA$. (volumen del sólido limitado superiormente por la gráfica de f e inferiormente por la región plana \mathbb{R})

El segundo miembro es $f(P^*) A(\mathbb{R})$. (volumen del cilindro de altura $f(P^*)$ y base \mathbb{R}).



INTEGRALES PARAMÉTRICAS

Sean α y β funciones continuas en $[a, b]$ y $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ continua, donde R es una región de \mathbb{R}^2 , cerrada y acotada tal que:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Se llama integral paramétrica a la función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

Interpretación Geométrica.

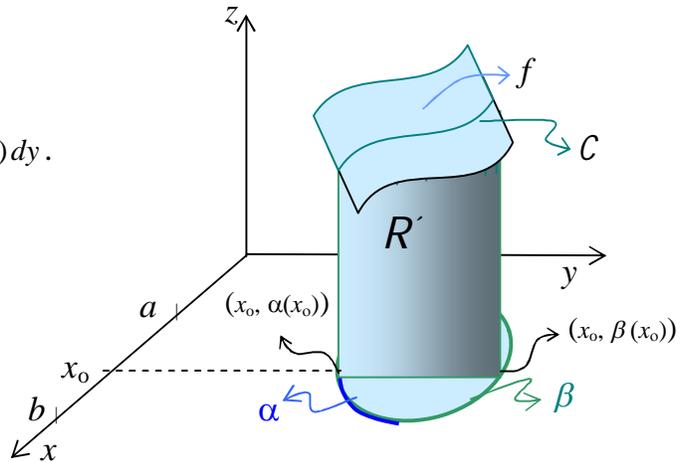
Sea $x_0 \in [a, b]$

$$F(x_0) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0, y) dy = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \varphi(y) dy.$$

$$F(x_0) = A(R').$$

En efecto, la curva C es

$$C \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases} \text{ y en el plano} \\ \text{vertical } x = x_0 \text{ su ecuación es} \\ z = f(x_0, y) = \varphi(y); \alpha(x_0) \leq y \leq \beta(x_0)$$



Por lo tanto $F(x_0)$ es el área $A(R')$ de la región R' del plano vertical de ecuación $x = x_0$, limitada superiormente por la curva $C = \varphi([\alpha(x_0), \beta(x_0)])$ e inferiormente por el segmento determinado por los puntos $(x_0, \alpha(x_0))$ y $(x_0, \beta(x_0))$.

Vamos a mostrar la continuidad de la integral paramétrica; pero antes veamos las consecuencias del hecho que la integral paramétrica sea una función continua.

Si F es una función continua en $[a, b]$, entonces $\forall x \in [a, b]$ se cumple:

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x). \text{ Entonces:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha(x+h)}^{\beta(x+h)} f(x+h, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_{\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(x+h)}^{\lim_{h \rightarrow 0} \beta(x+h)} \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h, y) dy$$

Observamos que la continuidad de la integral paramétrica se traduce en que se puede invertir el proceso “límite” con el de “integración”.

Proposición : La integral paramétrica es una función continua.

Dem.

Hay que probar : $\forall x \in [a, b] \lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x)$.

Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que determinar $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $(|h| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| < \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}
 F(x+h) - F(x) &= \int_{\alpha(x+h)}^{\beta(x+h)} f(x+h, y) dy - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \\
 &= \underbrace{\int_{\alpha(x+h)}^{\beta(x+h)} [f(x+h, y) - f(x, y)] dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{\beta(x)}^{\beta(x+h)} f(x, y) dy}_{I_2} - \underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+h)} f(x, y) dy}_{I_3}.
 \end{aligned}$$

$$|F(x+h) - F(x)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|.$$

Tenemos que acotar las tres integrales, para ello vamos a tener en cuenta propiedades de las funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados:

α y β son continuas en $[a, b]$, luego son **acotadas** y **uniformemente continuas** en $[a, b]$.

$$\therefore \exists H \text{ n}^\circ \text{ real tal que } \forall x \in [a, b] \quad |\alpha(x)| \leq H.$$

Porque son acotadas.

$$\exists L \text{ n}^\circ \text{ real tal que } \forall x \in [a, b] \quad |\beta(x)| \leq L.$$

Y por la continuidad uniforme vale:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, x' \in [a, b] \text{ si } |x - x'| < \delta \text{ entonces } |\alpha(x) - \alpha(x')| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta^*(\varepsilon) > 0 : \forall x, x' \in [a, b] \text{ si } |x - x'| < \delta^* \text{ entonces } |\beta(x) - \beta(x')| < \varepsilon.$$

Como f es continua en la región cerrada y acotada R , f es **acotada** y **uniformemente continua** en R .

$$\therefore \exists K \text{ n}^\circ \text{ real tal que } \forall (x, y) \in R \quad |f(x, y)| \leq K.$$

Porque es acotada.

Por ser uniformemente continua vale:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall P, Q \in R, \text{ si } \|P - Q\| < \delta \text{ entonces } |f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

$$|I_1| = \left| \int_{\alpha(x+h)}^{\beta(x+h)} [f(x+h, y) - f(x, y)] dy \right| \leq \int_{\alpha(x+h)}^{\beta(x+h)} |f(x+h, y) - f(x, y)| dy.$$

$$\text{Para } \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3(L+H)} \exists \delta_1(\varepsilon') : \underbrace{\|(x+h, y) - (x, y)\|}_{< \delta_1} \Rightarrow |f(x+h, y) - f(x, y)| < \varepsilon'.$$

$$\text{Entonces si } |h| < \delta_1(\varepsilon') : \quad |h|$$

$$|I_1| \leq \int_{\alpha(x+h)}^{\beta(x+h)} |f(x+h, y) - f(x, y)| dy < \int_{\alpha(x+h)}^{\beta(x+h)} \varepsilon' dy < \varepsilon' |\beta(x+h) - \alpha(x+h)|.$$

$$|I_1| < \varepsilon' (|\beta(x+h)| + |\alpha(x+h)|) < \varepsilon' (H + L).$$

$$\therefore \boxed{\text{Si } |h| < \delta_1 \text{ es } |I_1| < \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$|I_2| = \left| \int_{\beta(x)}^{\beta(x+h)} f(x,y) dy \right| \leq \int_{\beta(x)}^{\beta(x+h)} |f(x,y)| dy \leq K \int_{\beta(x)}^{\beta(x+h)} dy.$$

$$\text{Para } \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{3K} \quad \exists \delta_2(\varepsilon'') : \quad |(x+h) - x| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x+h) - \beta(x)| < \varepsilon''.$$

Entonces si $|h| < \delta_2(\varepsilon'')$:

$$|I_2| \leq K \int_{\beta(x)}^{\beta(x+h)} dy < K |\beta(x+h) - \beta(x)| < K \varepsilon''$$

$$\therefore \boxed{\text{Si } |h| < \delta_2 \text{ es } |I_2| < \frac{\varepsilon}{3}}. \text{ Un razonamiento similar muestra que :}$$

$$\text{Para } \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{3K} \quad \exists \delta_3(\varepsilon'') : \quad |(x+h) - x| < \delta_3 \Rightarrow |\alpha(x+h) - \alpha(x)| < \varepsilon''.$$

$$\therefore \boxed{\text{Si } |h| < \delta_3 \text{ es } |I_3| < \frac{\varepsilon}{3}}. \text{ Eligiendo } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}, \text{ tenemos:}$$

$$|h| < \delta \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |h| < \delta \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| < \varepsilon.$ Esto dice F continua. ■ Q.E.D.

El siguiente teorema nos da una regla para obtener la derivada de la integral paramétrica. Se conoce con el nombre de regla de derivación bajo el signo integral o regla de *Leibnitz*.

Regla de Leibnitz

Sea la integral paramétrica $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy.$$

donde α y β , además de continuas en $[a,b]$ son derivables en (a,b) ; f es continua en

$\mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ y existe f_x continua en \mathbb{R}^0 .

Entonces $\forall x \in (a,b)$ existe $F'(x)$ y vale :

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y) dy + f(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x).$$

Dem.

Probaremos la fórmula, primero, para el caso en que α y β sean constantes.

Sea entonces $F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y) dy$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x+h, y) dy - \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x+h, y) - f(x, y)] dy. \quad \text{Por T.V.M.C.D. (funciones de una)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\beta} h f_x(x+\theta h, y) dy. \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Es una integral paramétrica porque f_x es continua y por la continuidad de la integral paramétrica se puede invertir el límite con la integral.

$$\begin{aligned} &= \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{h \rightarrow 0} f_x(x+\theta h, y) dy. \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f_x(x, y) dy. \quad \text{Por la continuidad de } f_x. \end{aligned}$$

Hemos probado que si α y β son constantes F' existe y vale $F'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f_x(x, y) dy$.

Para probar la fórmula en el caso general, observemos que F es función de x , α y β .

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \Phi(x, \alpha(x), \beta(x)). \quad \text{Y por la regla de la cadena :}$$

$$F'(x) = \Phi_x + \Phi_{\alpha} \alpha' + \Phi_{\beta} \beta'. \quad (*)$$

$$\Phi_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) = \int_{\alpha}^{\beta} f_x(x, y) dy. \quad \text{Por lo que acabamos de probar } (\alpha \text{ y } \beta \text{ ctes}).$$

$$\Phi_{\beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) = f(x, \beta(x)). \quad \leftarrow \text{Por Teorema Fundamental del Cálculo.}$$

$$\Phi_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(- \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} f(x, y) dy \right) = -f(x, \alpha(x)).$$

Reemplazando en (*) obtenemos la fórmula de Leibnitz.

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x).$$

CÁLCULO DE UNA INTEGRAL DOBLE MEDIANTE DOS INTEGRALES SIMPLES SUCESIVAS.

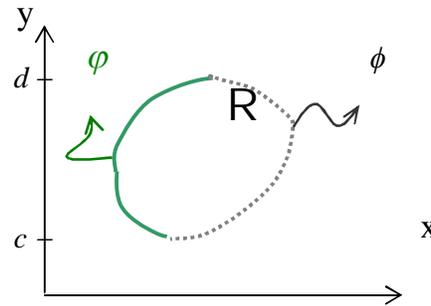
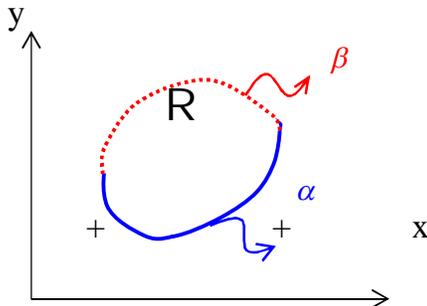
El cálculo directo (*usando la definición*) de una integral múltiple suele ser complicado. Bajo ciertas condiciones puede calcularse una integral múltiple mediante integrales simples sucesivas.

Sea $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua en \mathbb{R} , región cerrada, acotada tal que :

$$\mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Entonces f es integrable y vale:

$$\iint_{\mathbb{R}} f(P) dA = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx \right) dy.$$



Vamos a hacer primeramente la demostración para el caso particular de una región rectangular.

Si $\mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d\}$, probaremos :

$$\iint_{\mathbb{R}} f(P) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$

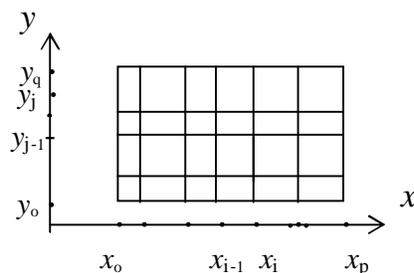
Demostración.

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx, \quad \text{con } F(x) = \int_c^d f(x,y) dy \text{ integral paramétrica.}$$

Sea π una partición de \mathbb{R} en $n = p \cdot q$ rectángulos R_k obtenida trazando, sobre el lado ab , $p+1$ puntos de subdivisión y sobre el lado cd , $q+1$ puntos tales que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{p-1} < x_p = b.$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_{q-1} < y_q = d$$



$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x) dx$$

Por T.V.M.C.I.

$\forall i = 1, \dots, p. \exists \xi_i :$

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$

y vale:

$$= \sum_{i=1}^p F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

$$= \sum_{i=1}^p \left[\int_c^d f(\xi_i, y) dy \right] (x_i - x_{i-1}).$$

$$= \sum_{i=1}^p \left[\sum_{j=1}^q \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \right] (x_i - x_{i-1}).$$

Nuevamente, por T.V.M.C.I.

$\forall j = 1, \dots, q. \exists \eta_j :$

$y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j.$

y vale:

$$= \sum_{i=1}^p \left[\sum_{j=1}^q f(\xi_i, \eta_j)(y_j - y_{j-1}) \right] (x_i - x_{i-1}).$$

Llamando R_k al rectángulo parcial determinado por los puntos (x, y) tales que

$x_{i-1} \leq x \leq x_i$ e $y_{j-1} \leq y \leq y_j$; y $P_k = (\xi_i, \eta_j)$, como $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ e $y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j$,

resulta $P_k \in R_k$ y $A(R_k) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$. Entonces podemos decir que:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \sum_{k=1}^n f(P_k) A(R_k).$$

El 1er miembro es constante y las sumas de Riemann del 2do miembro tienen límite cuando $n \rightarrow \infty$ y $\eta(\pi) \rightarrow 0$ porque f , al ser continua en un rectángulo es integrable.

Entonces:

$$\lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left[\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx \right] = \lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left[\sum_{k=1}^n f(P_k) A(R_k) \right].$$

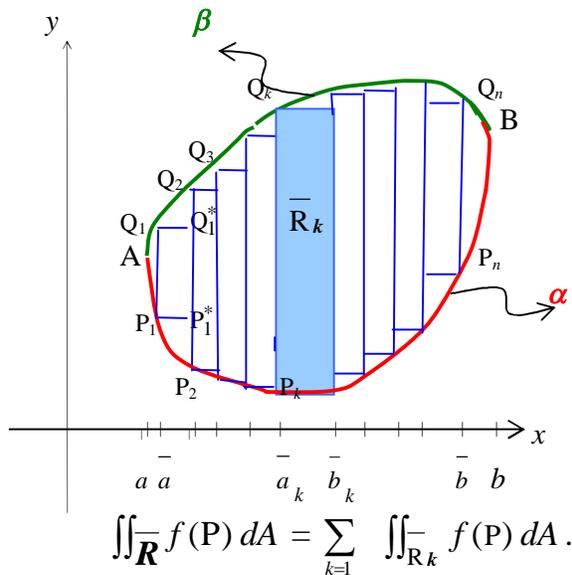
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \iint_{\mathbf{R}} f(P) dA. \quad \text{Q.E.D.}$$

La otra igualdad se prueba análogamente. ■

Probaremos ahora el resultado cuando α y β no son ctes

Suponemos $\mathbf{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b ; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, y f continua en \mathbf{R} , por tanto integrable.

Vamos a probar $\iint_{\mathbf{R}} f(\mathbf{P}) dA = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx$.



Inscribimos en \mathbf{R} una poligonal de lados verticales y horizontales tales que el lado horizontal de mayor longitud tenga una longitud $\delta > 0$ y se pueda hacer tan pequeña como se quiera. A los vértices que se apoyan en α los llamo P_1, P_2, \dots, P_n y a los que se apoyan en β Q_1, Q_2, \dots, Q_n . La poligonal delimita una región \mathbf{R} que descomponemos en un número finito n de regiones parciales rectangulares \mathbf{R}_k .

A la función en escalera constituida por la poligonal parcial $Q_1 Q_1^* Q_2 Q_2^*, \dots$ la llamo $\bar{\beta}$ y a la función que representa a la poligonal inferior la llamo $\bar{\alpha}$.

Estas son funciones continuas con un número finito de discontinuidades.

En cada intervalo (\bar{a}_k, \bar{b}_k) $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ toman valores constantes.

Como $\forall k=1, \dots, n$ \mathbf{R}_k es una región rectangular,

$$\iint_{\mathbf{R}_k} f(\mathbf{P}) dA = \int_{\bar{a}_k}^{\bar{b}_k} \left(\int_{\bar{\alpha}(x)}^{\bar{\beta}(x)} f(x,y) dy \right) dx. \quad \text{Cuando sumamos sobre } k, \text{ obtenemos}$$

$$\iint_{\mathbf{R}} f(\mathbf{P}) dA = \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbf{R}_k} f(\mathbf{P}) dA = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx. \quad \text{Cuando } \delta \rightarrow 0,$$

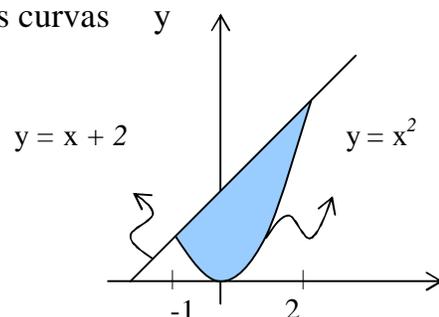
$$\bar{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \bar{a} \rightarrow a \text{ y } \bar{b} \rightarrow b. \quad \text{Por lo tanto: } \iint_{\mathbf{R}} f(\mathbf{P}) dA = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{\bar{\mathbf{R}}} f(\mathbf{P}) dA$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

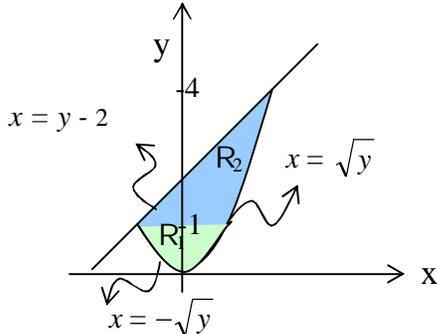
Ejemplo:

Calcular el área de la región plana limitada por las curvas de ecuaciones: $y = x + 2$; $y = x^2$.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{R}) &= \iint_{\mathbf{R}} dA = \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



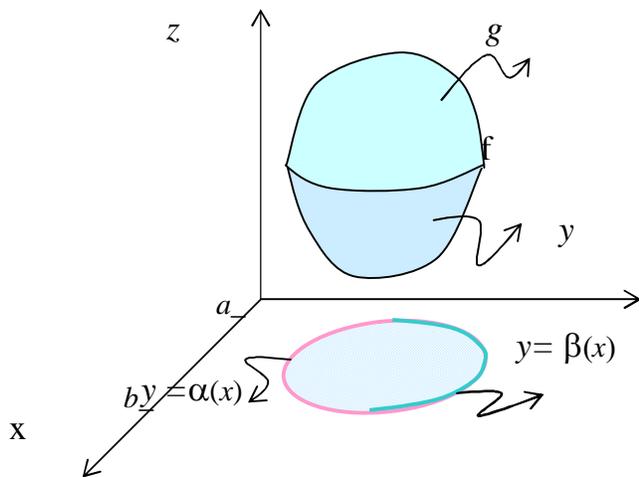
Invirtiendo el orden de integración tenemos:



$$\begin{aligned}
 A(R) &= \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA. \\
 &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx. \\
 &= \int_0^1 2\sqrt{y} dy + \int_1^4 [\sqrt{y} - (y-2)] dy. \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Para integrales triples el resultado es:

$$I = \iiint_{\sigma} F(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z) dz .$$



Cambiando el orden de integración, obtenemos:

$$\iiint_{\sigma} F(x, y, z) dV = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z) dz = \int_h^k dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{\Psi(y,z)}^{\Phi(y,z)} F(x, y, z) dx$$

etc. Hay seis posibilidades. Se elige el orden de integración que convenga.

Ejercicio:

Calcular $\iiint_{\tau} \frac{1}{3} y dV$. τ es la región espacial interior al paraboloide

$z = 4 - (x^2 + y^2)$ y al cilindro $x^2 + y^2 = 1$; y exterior a $z = 1 - (x^2 + y^2)$

$$\iiint_{\sigma} \frac{1}{3} y dV = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{1-(x^2+y^2)}^{4-(x^2+y^2)} \frac{1}{3} y dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{3} y 3 dy$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES MÚLTIPLES.

Puede ocurrir que el cálculo de una integral en coordenadas cartesianas sea demasiado complicado. En algunos casos, mediante un cambio de variables adecuado, puede simplificarse la resolución de la integral.

La fórmula para el cambio de variables en integrales simples es:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f(g(u)) g'(u) du .$$

Donde $g: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ derivable con derivada g' continua; $a = g(a')$ y $b = g(b')$.
 $u \mapsto x = g(u)$

Enunciamos sin demostración, el teorema de cambio de variables para integrales dobles:

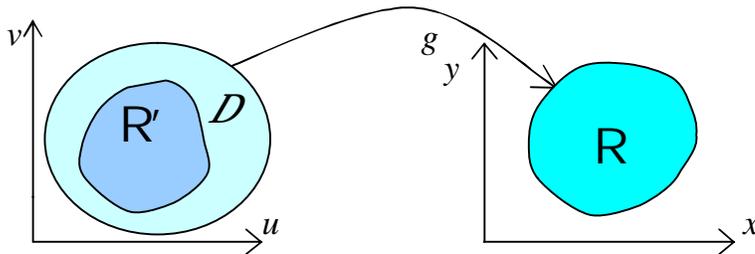
Teorema.

Sea $g: D \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ una transformación continuamente diferenciable, inyectiva en R y tal que $\det(g') \neq 0$ en $R \subset D \subset \mathbb{R}^2$.

Si R' es un conjunto acotado cuya frontera está formada por un número finito de curvas regulares, $R = g(R') \subset \mathbb{R}^2$ y $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua, entonces:

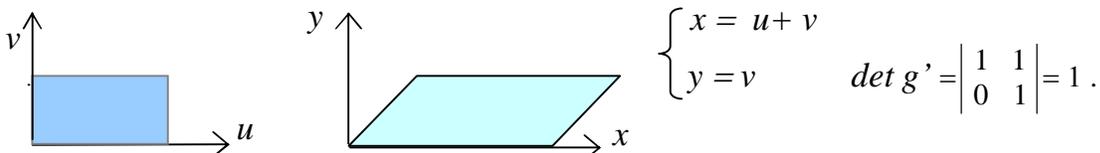
$$\iint_{R'} f(x, y) dx dy = \iint_R f(g(u, v)) |\det g'| du dv .$$



El resultado sigue siendo válido aún cuando g no sea inyectiva en una curva contenida en R' y $\det(g') = 0$ en los puntos de una curva contenida en R' .

Ejemplo 1.

Si R es el paralelogramo de vértices $(0,0)$; $(2,0)$; $(1,1)$; $(3,1)$, la integral $\iint_R (x+y) dx dy$ puede transformarse en una integral sobre un rectángulo mediante la transformación $g(u,v) = (u+v, v)$.



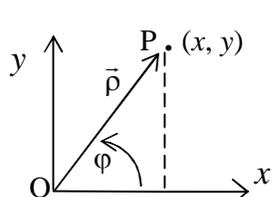
$$\begin{aligned} \therefore \iint_R (x+y) dx dy &= \iint_R (u+2v) du dv = \int_0^2 du \int_0^1 (u+2v) dv \\ &= \int_0^2 (uv+v^2) \Big|_0^1 du = \int_0^2 (u+1) du = \left(\frac{u^2}{2} + u \right) \Big|_0^2 = 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Coordenadas polares.

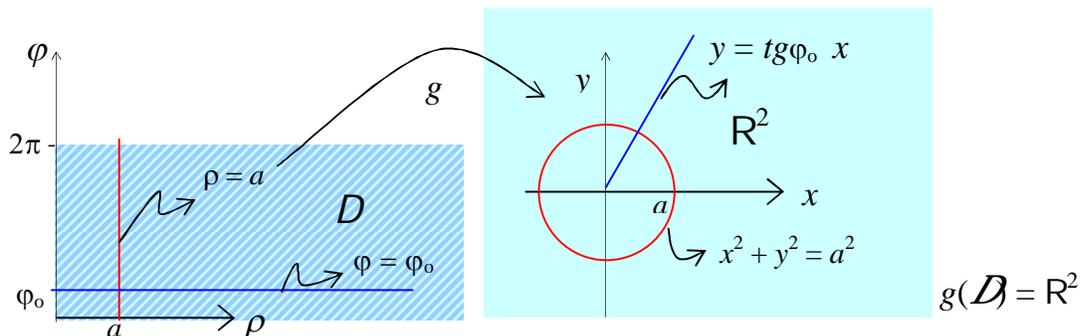
$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad D = \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$$

$$(\rho, \varphi) \mapsto (x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$$

 $\vec{p} = \vec{OP}$, φ es el ángulo que forma el semieje \vec{Ox} (eje polar) con el radio vector \vec{p} .

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\det g' = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$



La aplicación g transforma: el segmento $\begin{cases} \rho = a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ del plano $\rho \varphi$ en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ del plano $x y$.
y la semirrecta $\varphi = \varphi_0$ en la semirrecta $y = \operatorname{tg} \varphi_0 x$.

Si $R' \subset D$ es una región acotada, $R = g(R')$
y $f: R \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua, entonces

$$\iint_{R'} f(x, y) dx dy = \iint_R f(g(\rho, \varphi)) \rho d\rho d\varphi.$$

La fórmula vale aún cuando g no es inyectiva en D porque transforma el segmento $\rho = 0$ de D en el punto $(0,0)$ de \mathbb{R}^2 y las semirrectas $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$ de D en el semieje ox de

Ejercicio

Calcular el área de la región en el 1er cuadrante limitada por: las rectas $\sqrt{3}y = x$, $y = \sqrt{3}x$, y las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

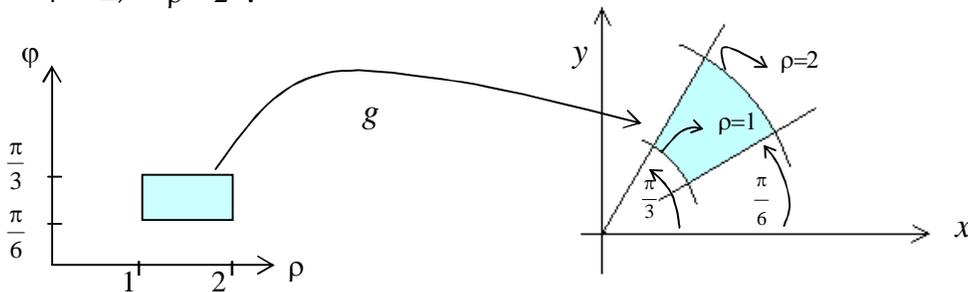
Las ecuaciones de las rectas y de las circunferencias en coordenadas polares, son:

$$\sqrt{3}y = x \Rightarrow \sqrt{3}\rho \operatorname{sen}\varphi = \rho \operatorname{cos}\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 \operatorname{cos}^2\varphi + \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2.$$



$\therefore R$ está determinada por : $1 \leq \rho \leq 2$

$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore A(R) = \iint_R \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^2 \rho \, d\rho = \frac{\pi}{4}.$$

Cambio de variables en integrales triples

El teorema de cambio de variables en integrales triples se enuncia igual.

Sea $g: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ continuamente diferenciable, inyectiva y tal que $\det(g') \neq 0$ en D . Si $\tau' \subset D$ es un conjunto acotado cuya frontera está formada por un número finito de superficies regulares, $\tau = g(\tau') \subset \mathbb{R}^3$ y $f: \tau \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua, entonces vale:

$$\iiint_{\tau} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\tau'} f(g(u, v, w)) |\det g'| \, du \, dv \, dw.$$

El resultado sigue siendo válido aún cuando g no sea inyectiva o $\det(g') = 0$ en los puntos de una curva o de una superficie contenida en τ' .

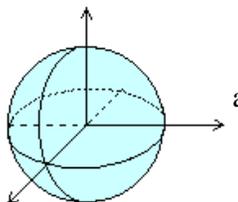
Ejemplo:

Calcular el volumen de una esfera de radio a , usando integrales triples.

La ecuación de la esfera es $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$\therefore V = \iiint_{\tau} dx dy dz$. El cálculo en coordenadas

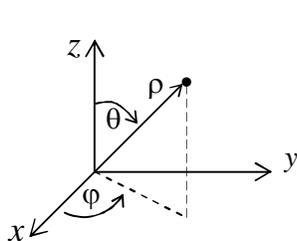
cartesianas es complicado pues:



$$V = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz$$

Para calcular la integral triple vamos a usar coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas



$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \operatorname{cos}\theta . \end{cases}$$

$$g: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$D = \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$(\rho, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$$

$$g(D) = \mathbb{R}^3.$$

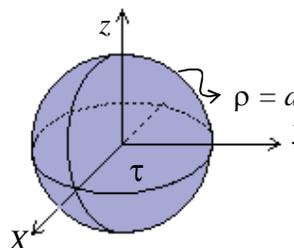
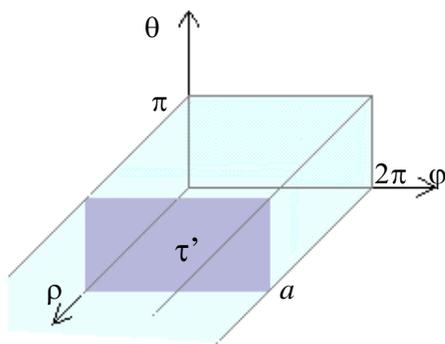
$$\begin{matrix} D \\ \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \\ \begin{cases} -\infty \leq x \leq \infty \\ -\infty \leq y \leq \infty \\ -\infty \leq z \leq \infty \end{cases} \end{matrix} \quad \det g' = \begin{vmatrix} x_{\rho} & x_{\varphi} & x_{\theta} \\ y_{\rho} & y_{\varphi} & y_{\theta} \\ z_{\rho} & z_{\varphi} & z_{\theta} \end{vmatrix} = -\rho^2 \operatorname{sen}\theta$$

La ecuación de la esfera de radio a , en coordenadas esféricas es $\rho = a$

$$0 \leq \rho < a$$

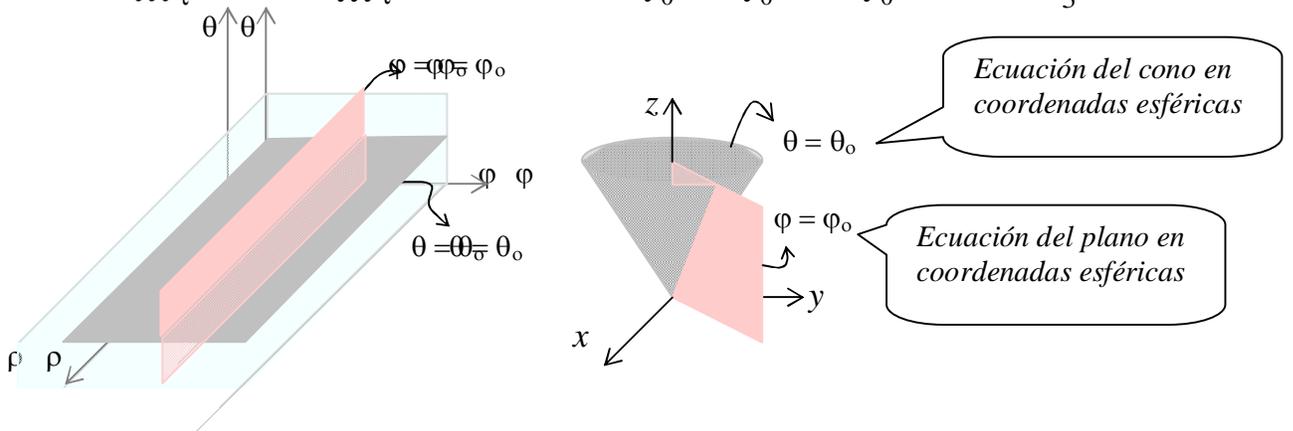
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow -\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$$



g transforma el rectángulo $\tau' \subset D$ de ecuación $\rho = a$ en la esfera τ del espacio XYZ.

$$V = \iiint_{\tau} dx dy dz = \iiint_{\tau} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^3. \blacksquare$$



Para calcular el volumen de un elipsoide se usan las coordenadas esféricas elípticas:

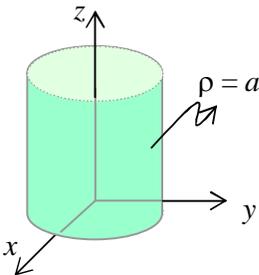
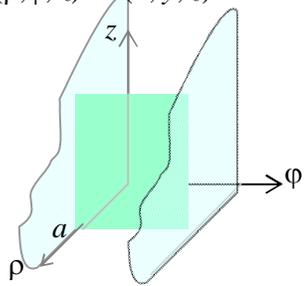
$$\begin{cases} x = a \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = b \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = c \rho \cos \theta. \end{cases}$$

El determinante jacobiano de esta transformación es $abc \rho^2 \sin \theta$.

Coordenadas cilíndricas

$$g: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad D = \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}. \quad g(D) = \mathbb{R}^3$$

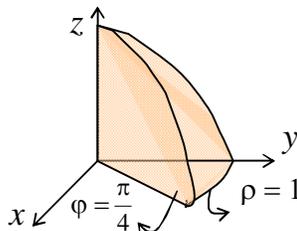
$$(\rho, \varphi, z) \mapsto (x, y, z) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



$$\det g = \begin{vmatrix} x_{\rho} & x_{\varphi} & x_z \\ y_{\rho} & y_{\varphi} & y_z \\ z_{\rho} & z_{\varphi} & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

La ecuación del cilindro es $\rho = a$.

Ejercicio : Calcular el volumen del sólido en el 1er octante, limitado por $1 - z = x^2 + y^2$ y por los planos $x = y$; $x = 0$; $z = 0$.



En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de los planos $x = y$, $x = 0$, $z = 0$ son respectivamente:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z = 0.$$

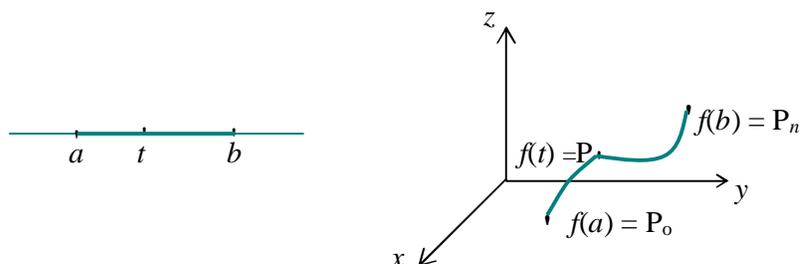
La ecuación del paraboloides es $1 - z = \rho^2$.

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho^2} dz = \frac{\pi}{16}. \blacksquare$$

INTEGRALES CURVILÍNEAS.

LONGITUD DE ARCO DE CURVA.

Sea la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua; $\gamma = f([a, b])$.
 $t \mapsto f(t) = (x(t), y(t), z(t))$



Si f es inyectiva γ no se corta a si misma.

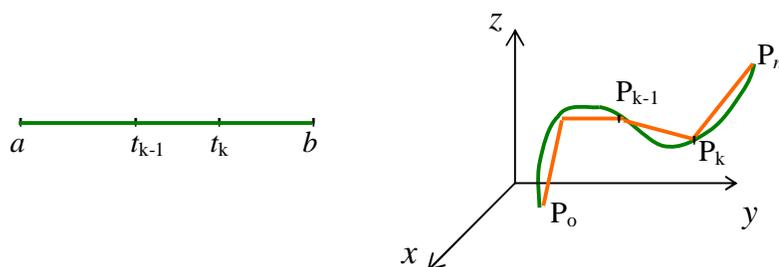
Consideremos una partición π de $[a, b]$ mediante $n-1$ puntos de subdivisión:

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_{n-1} < t_n = b . \quad \eta(\pi) = \max\{ |t_k - t_{k-1}| \mid k=1, \dots, n \} .$$

Sobre la curva tenemos los correspondientes puntos:

$f(a) = P_0, \dots, P_{k-1}, P_k, \dots, P_n = f(b)$, que determinan una poligonal cuya longitud es

$$\ell(P) = \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| . \quad f(t_k) = P_k$$



Si existe el límite de $\ell(P)$ cuando $\eta(\pi)$ tiende a cero al tender n a infinito y es independiente de la particular poligonal, por definición, es la longitud de la curva γ .

$$\ell(\gamma) = \lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| .$$

Cuando una curva tiene longitud se dice rectificable. Generalmente es difícil calcular, usando la definición, la longitud de una curva rectificable.

El siguiente teorema proporciona una fórmula para calcular la longitud de γ cuando f' es continua en (a, b) .

Teorema

Sea $\gamma = f([a, b])$ tal que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua junto con f' en (a, b) ,

$$t \mapsto f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

y $\forall t \in (a, b) f'(t) \neq (0, 0, 0)$.

Entonces γ es rectificable y $\ell(\gamma) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

No damos en detalle la demostración del teorema, sólo daremos un argumento que justifica la validez del mismo.

Como f' es continua en (a, b) , f es diferenciable. Si π es una partición de $[a, b]$, $\forall k = 1, \dots, n$ es $f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + \omega(t_k - t_{k-1})$.

$$\text{con } \lim_{\substack{t_k \rightarrow t_{k-1} \\ t_k - t_{k-1}}} \frac{\omega(t_k - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \vec{0}.$$

Por lo tanto, si $\eta(\pi)$ es suficientemente pequeña, $\forall k = 1, \dots, n$ podemos aproximar:

$$\|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \approx \|f'(t_{k-1})\| (t_k - t_{k-1}) \text{ y entonces}$$

$$\ell(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \approx \sum_{k=1}^n \|f'(t_{k-1})\| (t_k - t_{k-1}).$$

$$\therefore \lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| = \lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \|f'(t_{k-1})\| (t_k - t_{k-1})$$

y como f' es continua, $\|f'\|$ también es continua por lo tanto integrable.

$$\text{Por el teorema de Darboux } \lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \|f'(t_{k-1})\| (t_k - t_{k-1}) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

$$\therefore \ell(\gamma) = \int_a^b \|f'(t)\| dt \quad \text{Q.E.D.}$$

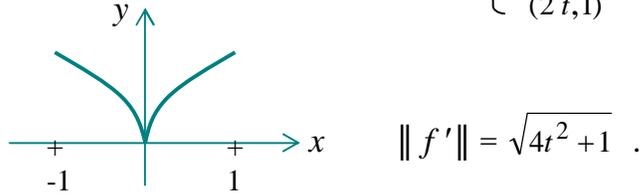
Una curva se dice regular a trozos si f' es continua en un número finito de intervalos (a, b) . Esto permite calcular la longitud de curvas cuyo vector tangente \vec{f}' tiene un cambio brusco de dirección.

Ejemplo

Calcular la longitud de la curva plana γ definida por $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$t \mapsto (t |t|, |t|)$$

Esta curva es regular a trozos $f'(t) = \begin{cases} (-2t, -1) & \text{si } -1 < t < 0 \\ (2t, 1) & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$ su gráfica es:



$$\ell(\gamma) = \int_{-1}^0 \sqrt{4t^2 + 1} dt + \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1} dt .$$

Si hacemos el cambio de variable : $2t = \sinh u \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \cosh u du$. Entonces

$$\sqrt{4t^2 + 1} = \cosh u \therefore \ell(\gamma) = \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh^2 u du = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{5}) .$$

INTEGRAL CURVILÍNEA (de una función real)

Las integrales curvilíneas son una generalización del concepto de integral simple sobre un intervalo real.

Sea γ una curva regular descrita por $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva.

$$t \mapsto f(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

y supongamos que en $\gamma = f([a, b]) \subset \mathbb{R}^3$ esté definida una función real F acotada

$$F : \gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$$

Si efectuamos una partición π de $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$$

logramos, como antes, una partición en γ .

Podemos interpretar a γ como un alambre y a F como la densidad, por unidad de longitud, de una distribución de masa en γ .

Llamamos $P_k = f(t_k)$ y formamos la suma $\sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k$ donde $s(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$.

$$\Delta s_k = s(t_k) - s(t_{k-1}) = \int_a^{t_k} \|f'(u)\| du - \int_a^{t_{k-1}} \|f'(u)\| du = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f'(u)\| du . \text{ Si existe}$$

$\lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k$, es por definición la integral curvilínea a lo largo de γ de la

función real F y se denota $\int_{\gamma} F(x, y, z) ds$. Si la función F es continua, existe el límite

$$\text{y se puede probar : } \lim_{\substack{\eta(\pi) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \|f'\| dt .$$

Entonces resulta:

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \|f'\| dt .$$

Si interpretamos a γ como un alambre y a F como la densidad por unidad de longitud, de una distribución de masa en γ , la masa del alambre es la integral curvilínea $\int_{\gamma} F(x, y, z) ds$.

INTEGRAL CURVILÍNEA (de un campo vectorial)

Supongamos ahora que la curva γ está contenida en $D \subset \mathbb{R}^3$ y que en D está definida una función vectorial continua

$$\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) .$$

Si $\vec{v}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$ es el vector unitario, tangente a γ en $f(t)$, se define la integral curvilínea del campo \vec{F} a lo largo de γ , a $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} ds$.

Es la integral de la componente del campo en la dirección de la tangente a la curva

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} ds = \int_a^b \vec{F}(f(t)) \cdot \vec{f}'(t) dt .$$

$$= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + F_3(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t)] dt .$$

Esta última integral puede ser abreviada así : $\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

Si \vec{F} es un campo de fuerzas la integral curvilínea $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} ds$ representa el trabajo realizado para mover una partícula a lo largo de γ .

Ejemplo

Calcular el trabajo W efectuado al mover una partícula a lo largo de la curva

$(x, y, z) = (t, t, t^2)$ $0 \leq t \leq 2$; bajo la influencia del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, y, y)$.

$$W = \int_0^2 [(t+t) \cdot 1 + t \cdot 1 + t \cdot 2t] dt = \int_0^2 (3t + 2t^2) dt = \frac{34}{3} .$$

PARAMETRIZACIONES EQUIVALENTES

La curva γ del ejemplo anterior está parametrizada por la función f

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma = f([0, 2]) . \quad \text{Observemos que } g: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma = g([0, 4])$$

$$t \mapsto (t, t, t^2) \qquad u \mapsto \left(\frac{u}{2}, \frac{u}{2}, \frac{u^2}{4}\right)$$

es otra parametrización de γ .

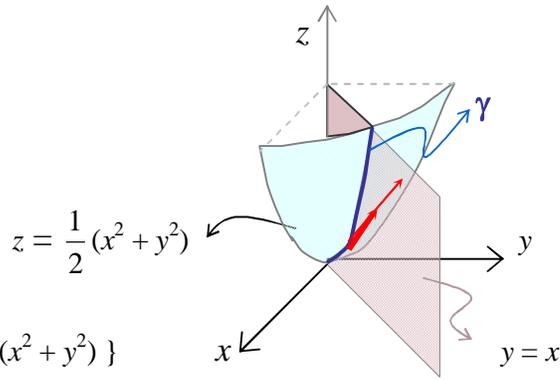
Tanto f como g describen la curva γ . La diferencia está en la velocidad de recorrido, puesto que $f'(t) = (1, 1, 2t)$ y $g'(u) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{u}{2})$. La dirección y el sentido de los vectores tangentes son los mismos. Sólo difieren en el módulo.

Esto significa que al crecer el parámetro, el sentido de recorrido de la curva en ambos casos es el mismo.

Cuando ocurra esto diremos que las parametrizaciones son equivalentes.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases}$$

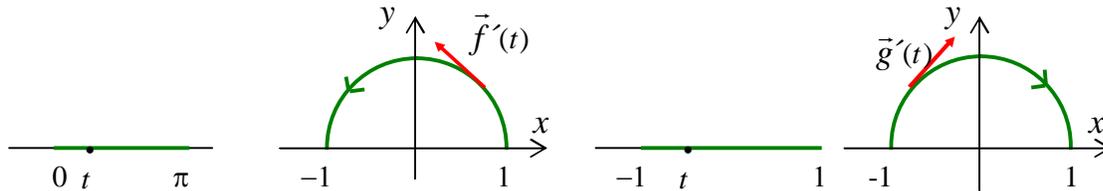
$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, y = x, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}$$



Consideremos ahora una curva γ descrita por las siguientes funciones f y g .

$$f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$$



La curva es la misma en ambos casos pues $\gamma = f([0, \pi]) = g([-1, 1])$; pero al crecer el parámetro t entre 0 y π , f describe la curva en sentido contrario al de g cuando t crece desde -1 hasta 1 . En este caso decimos que f y g no son parametrizaciones equivalentes.

A continuación vamos a definir formalmente cuándo dos parametrizaciones de una curva son equivalentes.

Definición

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, funciones continuas son parametrizaciones equivalentes de una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ si existe una transformación $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ continuamente diferenciable tal que:

$$u \mapsto t = \varphi(u)$$

$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $\varphi'(u) > 0$ en (α, β) y $g = f \circ \varphi$.

Si dos parametrizaciones son equivalentes la función φ es creciente puesto que φ' es positiva en (α, β) . Luego, cuando crece el parámetro u , también crece el parámetro t y así f y g describen la curva en el mismo sentido. Hemos dicho que son

parametrizaciones equivalentes $f(t) = (t, t, t^2)$ y $g(u) = (\frac{u}{2}, \frac{u}{2}, \frac{u^2}{4})$ con $\begin{matrix} 0 \leq t \leq 2 \\ 0 \leq u \leq 4 \end{matrix}$

En efecto, en este caso la función φ es: $t = \varphi(u) = \frac{u}{2}$. y $\varphi'(u) = \frac{1}{2} > 0$.

Convenio: Cuando f y g describan la misma curva; pero no sean equivalentes, si llamamos γ a la curva descrita por f , llamaremos $-\gamma$ a la descrita por g , es decir a la misma curva pero recorrida en sentido contrario.

Cuando $f(a) = f(b)$ diremos que la curva es cerrada. La integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada se denota \oint_{γ} . Para una curva plana, se define sentido positivo de recorrido al sentido contrario al de las agujas del reloj. Si la curva está en \mathbb{R}^3 el sentido positivo de recorrido es el de un observador que deja la región encerrada a su izquierda.

Si f en $[a, b]$ y g en $[\alpha, \beta]$ son parametrizaciones de γ y $-\gamma$, respectivamente, $\exists \psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ continuamente diferenciable tal que : $a = \psi(\beta)$, $b = \psi(\alpha)$,
 $u \mapsto t = \psi(u)$ $\psi'(u) < 0$ en (α, β) y $g = f \circ \psi$.

PROPIEDADES (de las integrales curvilíneas de funciones reales)

Para las integrales curvilíneas de funciones reales, además de las propiedades: de linealidad y monotonía del integrando y aditividad respecto de la curva (región de integración), vale la propiedad de invarianza respecto de la parametrización de la curva. Esto es :

Si f y g son dos parametrizaciones de una curva γ y F es una función real definida en γ entonces $\int_{\gamma} F ds$ no depende de la parametrización.

Esto es: $\int_{\gamma} F ds = \int_a^b F(f(t)) \|f'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(g(u)) \|g'(u)\| du.$

¡Probar!

En consecuencia $\int_{-\gamma} F ds = \int_{\gamma} F ds.$

PROPIEDADES (de las integrales curvilíneas de funciones vectoriales)

Las integrales curvilíneas de campos vectoriales tienen las propiedades: linealidad respecto del integrando, aditividad respecto de la curva e invarianza respecto de parametrizaciones equivalentes de la curva . Esto es:

Si f y g son parametrizaciones equivalentes $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} ds$ no depende de f y g .

Pero ¡¡ ATENCIÓN !!...

¡Probar!

Si las parametrizaciones no son equivalentes entonces $\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} ds = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} ds.$

Ejemplo:

Si γ está parametrizada por $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $-\gamma$ por $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (\cos t, \sen t)$ $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$

$$\int_{-\gamma} -y dx + x dy = \int_{-1}^1 (-\sqrt{1-t^2} \cdot 1 + t \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}) dt = \int_{-1}^1 \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\text{Arcsen } t \Big|_{-1}^1 = -\pi.$$

$$\int_{\gamma} -y dx + x dy = \int_0^{\pi} [-\sen t \cdot (-\sen t) + \cos t \cdot (\cos t)] dt = \int_0^{\pi} dt = \pi.$$

TEOREMA DE GAUSS-GREEN.

El teorema de Gauss-Green relaciona integrales dobles con integrales curvilíneas.

Teorema de Gauss-Green:

1) Sea una región $R \subset \mathbb{R}^2$ cerrada, acotada y simple (cualquier paralela a los ejes coordenados corta a la frontera de R en , a lo sumo, dos puntos o en los infinitos puntos de un segmento de recta).

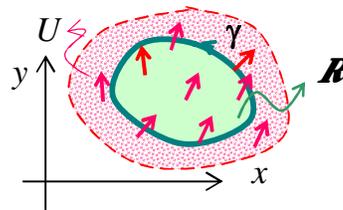
2) Sea γ la frontera de R , una curva cerrada regular a trozos parametrizada de tal modo que quede recorrida una sola vez, en sentido positivo (sentido contrario al de las agujas del reloj).

3) Sea \vec{F} un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 , tal que $R \subset U \subset \mathbb{R}^2$. $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto \vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

Entonces vale:

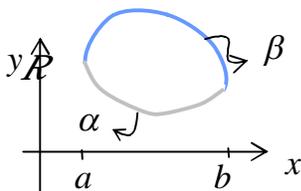
$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy .$$



Demostración:

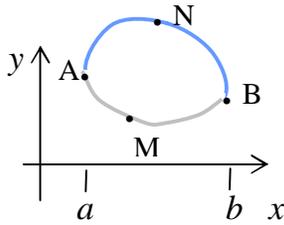
Observemos que la integral doble existe porque $(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$ es una función continua en la región cerrada y acotada. ¿Qué hipótesis garantiza la continuidad de las derivadas parciales $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ y $\frac{\partial F_1}{\partial y}$? Y la integral curvilínea existe porque F_1 y F_2 son continuas a lo largo de γ . ¿Por qué?

Vamos a probar: $\boxed{\iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \oint_{\gamma} F_1(x,y) dx}$ y $\boxed{\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \oint_{\gamma} F_2(x,y) dy}$.



$$\begin{aligned} \iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) dy . \\ &= -\int_a^b [F_1(x,\beta(x)) - F_1(x,\alpha(x))] dx . \end{aligned}$$

∴ $\iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b [F_1(x,\alpha(x)) - F_1(x,\beta(x))] dx . \quad (1)$



Consideremos ahora la integral curvilínea.

La curva γ es la unión de los arcos \widehat{AMB} y \widehat{BNA} .

$$\widehat{AMB} : \begin{cases} x=t \\ y=\alpha(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b ; \quad \widehat{ANB} : \begin{cases} x=t \\ y=\beta(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b .$$

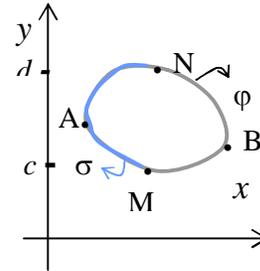
$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F_1(x,y) dx &= \int_{\widehat{AMB}} F_1(x,y) dx + \int_{\widehat{BNA}} F_1(x,y) dx . \\ &= \int_{\widehat{AMB}} F_1(x,y) dx - \int_{\widehat{ANB}} F_1(x,y) dx . \\ &= \int_a^b F_1(t, \alpha(t)) dt - \int_a^b F_1(t, \beta(t)) dt . \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} F_1(x,y) dx = \int_a^b [F_1(t, \alpha(t)) - F_1(t, \beta(t))] dt . \quad (2)$$

De (1) y (2) : $\iint_{\mathbf{R}} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \oint_{\gamma} F_1(x,y) dx . \quad Q.E.D.$

La otra igualdad se prueba de manera análoga considerando a la curva γ como la unión de los arcos \widehat{MBN} y \widehat{NAM} .

$$\widehat{MBN} : \begin{cases} y=t \\ x=\varphi(t) \end{cases} \quad c \leq t \leq d . \quad \widehat{MAN} : \begin{cases} y=t \\ x=\sigma(t) \end{cases} \quad c \leq t \leq d .$$

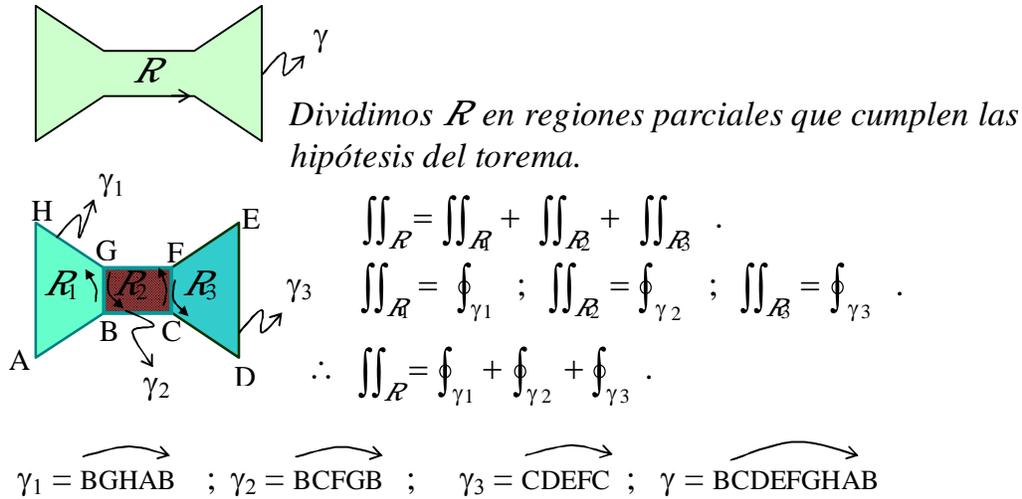


$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F_2(x,y) dy &= \int_{\widehat{MBN}} F_2(x,y) dy + \int_{\widehat{NAM}} F_2(x,y) dy . \\ &= \int_{\widehat{MBN}} F_2(x,y) dy - \int_{\widehat{MAN}} F_2(x,y) dy = \int_c^d F_2(\varphi(t), t) dt - \int_c^d F_2(\sigma(t), t) dt . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F_2(x,y) dy &= \int_c^d [F_2(\varphi(t), t) - F_2(\sigma(t), t)] dt . \\ \iint_{\mathbf{R}} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\sigma(y)}^{\varphi(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) dx = \int_c^d [F_2(\varphi(y), y) - F_2(\sigma(y), y)] dy . \end{aligned}$$

$$\therefore \iint_{\mathbf{R}} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \oint_{\gamma} F_2(x,y) dy . \quad Q.E.D.$$

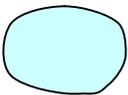
Veamos que el teorema sigue siendo válido aún cuando algunas paralelas a los ejes corten a la frontera de la región en más de dos puntos como en el caso de la región de la figura:



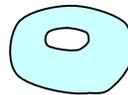
$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} + \oint_{\gamma_3} &= \int_{\widehat{BG}} + \int_{\widehat{GHAB}} + \int_{\widehat{BC}} + \int_{\widehat{CF}} + \int_{\widehat{FG}} + \int_{\widehat{GB}} + \int_{\widehat{CDEF}} + \int_{\widehat{FC}} . \\ &= \int_{\widehat{BG}} + \int_{\widehat{GHAB}} + \int_{\widehat{BC}} + \int_{\widehat{CF}} + \int_{\widehat{FG}} - \int_{\widehat{BG}} + \int_{\widehat{CDEF}} - \int_{\widehat{CF}} . \\ &= \int_{\widehat{BC}} + \int_{\widehat{CDEF}} + \int_{\widehat{FG}} + \int_{\widehat{GHAB}} \\ &= \int_{\overrightarrow{BCDE}} = \oint_{\gamma} . \quad \therefore \iint_R = \oint_{\gamma} . \quad Q.E.D. \end{aligned}$$

Definición: Una región R se dice **simplemente conexa** si toda curva cerrada C contenida en R puede reducirse a un punto sin dejar de pertenecer a R .

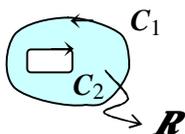
región simplemente conexa.



esta región no es simplemente conexa.



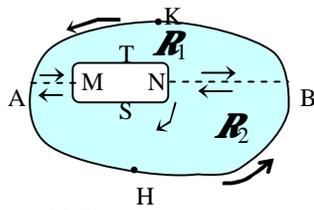
Para regiones que no son simplemente conexas, la tesis del teorema continúa subsistiendo siempre y cuando llamemos C al contorno total que se compone de C_1 y C_2 .



$$\iint_R = \oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} .$$

Observación

Si la región **no es simplemente conexa** el sentido positivo de recorrido del contorno o frontera de la región es el sentido en que se debe desplazar un observador para tener continuamente la región a su izquierda.



Dividimos R en dos regiones simplemente conexas:

R_1 limitada por la curva cerrada $\widehat{AMTNBKA}$ y

R_2 limitada por la curva cerrada $\widehat{AHBNSMA}$.

Si llamamos: $C_1 = \widehat{BKAHB}$; $C_2 = \widehat{NSMT}$; $C = C_1 \cup C_2$.

$$\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2} .$$

$$\iint_{R_1} = \int_{\widehat{BKA}} + \int_{\widehat{AM}} + \int_{\widehat{MTN}} + \int_{\widehat{NB}} .$$

$$\iint_{R_2} = \int_{\widehat{BN}} + \int_{\widehat{NSM}} + \int_{\widehat{MA}} + \int_{\widehat{AHB}} .$$

$$\iint_R = \int_{\widehat{BKA}} + \int_{\widehat{AM}} + \int_{\widehat{MTN}} + \int_{\widehat{NB}} + \int_{\widehat{BN}} + \int_{\widehat{NSM}} + \int_{\widehat{MA}} + \int_{\widehat{AHB}} .$$

$$\iint_R = \int_{\widehat{BKA}} + \int_{\widehat{AHB}} + \int_{\widehat{NSM}} + \int_{\widehat{MTN}} .$$

$$\iint_R = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \oint_C . \text{ Q.E.D.}$$

Ejercicio.

Expresar el área de una región plana usando integrales curvilíneas.

$$A(R) = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx .$$

$$\text{En efecto } \vec{F} = (-y, x) \quad \therefore \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_R dx dy \quad ; \quad \int F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy = \oint_C -ydx + xdy .$$

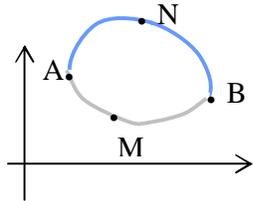
$$\therefore A(R) = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx .$$

A continuación vamos a estudiar **integrales curvilíneas que no dependen del camino de integración.**

Dada en el plano una región acotada R contenida en un abierto U donde está definido un campo vectorial continuo $\vec{F} = (X(x, y), Y(x, y))$, diremos que la integral curvilínea $\int_C X dx + Y dy$ no depende en R del camino de integración si para cada par

de puntos A B , arbitrariamente elegidos en R , la integral curvilínea no depende de la curva que une A con B sino de los puntos que hayamos elegido.

Si no depende del camino de integración, la integral curvilínea de un campo a lo largo de un camino cerrado vale cero. En efecto si A y B son dos puntos del camino cerrado \widehat{AMBNA} y la integral no depende



$$\begin{aligned} & \text{del camino de integración} \quad \int_{\widehat{AMB}} - \int_{\widehat{ANB}} \\ \therefore \int_{\widehat{AMB}} - \int_{\widehat{ANB}} &= 0 \\ &= \int_{\widehat{AMB}} + \int_{\widehat{BNA}} = \int_{\widehat{AMBNA}} = 0 \end{aligned}$$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE para que la integral curvilínea de un campo no dependa del camino de integración.

Sea \vec{F} un campo vectorial continuamente diferenciable en D región abierta y simplemente conexa de \mathbb{R}^2 . $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto \vec{F}(x,y) = (X(x,y), Y(x,y))$$

Condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea del campo no dependa del camino de integración en D es : $\forall (x,y) \in D, \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial X}{\partial y}(x,y)$.

Probamos primero que la condición es suficiente. Esto es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}(x,y) = (X(x,y), Y(x,y)) \\ \text{continua y diferenciable} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) \text{ en } D. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{la integral curvilínea del campo no depende del camino de integración en } D.$$

Demostración:

Sean C_1 y C_2 curvas contenidas en D que unen dos puntos A y B de D .

$$\text{Queremos probar } \int_{C_1} X dx + Y dy = \int_{C_2} X dx + Y dy$$

Llamemos $\gamma = C_1 \cup (-C_2)$. Resulta entonces que γ es una curva cerrada, frontera de una región simplemente conexa $R \subset D$.

Por el teorema de Gauss-Green :

$$\iint_R \underbrace{\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)}_0 dx dy = \oint_{\gamma} X dx + Y dy$$

0 por hipótesis

$$\oint_{\gamma} X dx + Y dy = 0 \Rightarrow \int_{C_1} X dx + Y dy + \int_{-C_2} X dx + Y dy = \int_{C_1} X dx + Y dy - \int_{C_2} X dx + Y dy = 0 \quad \therefore$$

$$\int_{C_1} X dx + Y dy = \int_{C_2} X dx + Y dy \quad \text{Q.E.D.}$$

Veamos ahora que la condición es necesaria.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{F}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) \text{ cont. diferenciable} \\ \text{en } D \text{ y la integral curvilínea del campo} \\ \text{no depende del camino de integración en } D. \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial X}{\partial y}(x, y) \text{ en } D.$$

Demostración:

Razonando por el absurdo, supongamos $\exists P_0 \in D$ tal que $\frac{\partial Y(P_0)}{\partial x} \neq \frac{\partial X(P_0)}{\partial y}$.

Entonces $\frac{\partial Y(P_0)}{\partial x} - \frac{\partial X(P_0)}{\partial y} \neq 0$. Supongamos $\frac{\partial Y(P_0)}{\partial x} - \frac{\partial X(P_0)}{\partial y} > 0$

Como $\frac{\partial Y}{\partial x}$ y $\frac{\partial X}{\partial y}$ son funciones continuas, por el teorema de la permanencia del

signo, $\exists B_\varepsilon(P_0) \subset D : \forall P \in B_\varepsilon(P_0) \quad \frac{\partial Y(P)}{\partial x} - \frac{\partial X(P)}{\partial y} > 0$.

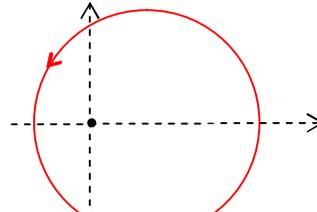
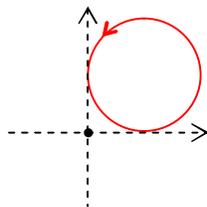
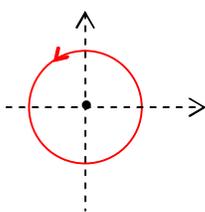
$\therefore \iint_{B_\varepsilon(P_0)} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > 0$. Entonces, por el teorema de Gauss-Green es:

$\oint_{\partial B_\varepsilon(P_0)} X dx + Y dy > 0$; esto es una contradicción porque la integral debería ser igual a cero ya que por hipótesis la integral no depende del camino de integración. Luego debe ser:

$$\forall P \in D \quad \frac{\partial Y(P)}{\partial x} = \frac{\partial X(P)}{\partial y} \quad \text{Q.E.D.}$$

Ejercicio: Mostrar que en los siguientes casos:

- a) C circunferencia de radio 1 y centro (0,0),
- b) C circunferencia de radio 1 y centro (1,1),
- c) C circunferencia de radio 2 y centro (1,0),



la integral $I = \oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, vale:

a) $I = 2\pi$.

b) $I = 0$.

c) $I = 2\pi$.

FORMAS DIFERENCIALES EXACTAS

Veremos a continuación otra condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea de un campo no dependa del camino de integración.

Definición:

Se llama *forma diferencial* en dos variables x e y a una expresión como la siguiente:

$$\boxed{X(x, y) dx + Y(x, y) dy} \quad (1)$$

La forma es continua si X e Y lo son.

Diremos que la *forma diferencial* (1) es *exacta* sii \exists en $D \subset \mathbb{R}^2$ una función diferenciable $\mathcal{U}: D \rightarrow \mathbb{R}$ llamada *potencial*, tal que

$$\frac{\partial \mathcal{U}(x,y)}{\partial x} = X(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{U}(x,y)}{\partial y} = Y(x,y).$$

Es decir: la *forma diferencial es exacta* sii \exists en $D \subset \mathbb{R}^2$ una función diferenciable $\mathcal{U}: D \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $d\mathcal{U} = X(x, y) dx + Y(x, y) dy$.

Cuando la forma diferencial es exacta el campo $(X(x, y), Y(x, y))$ se dice un *campo de gradiente* por ser el gradiente del potencial \mathcal{U} . Esto es:

$$\nabla \mathcal{U} = (X(x, y), Y(x, y)).$$

Vamos a probar la siguiente

Proposición

Condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea de un campo continuamente diferenciable sea independiente del camino de integración es que el campo sea un campo de gradiente o lo que es lo mismo, que la forma diferencial sea exacta.

Demostración

Sea \vec{F} un campo vectorial continuamente diferenciable en D región abierta y simplemente conexa de \mathbb{R}^2 . $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \vec{F}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$$

Lo que tenemos que probar es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La integral del campo no depende} \\ \text{del camino de integración en } D. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{La forma } X(x, y) dx + Y(x, y) dy \\ \text{es exacta.} \end{array}}$$

(\Leftarrow)

Supongamos que la forma es exacta. Entonces existe un potencial $\mathcal{U}(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial \mathcal{U}(x,y)}{\partial x} = X(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{U}(x,y)}{\partial y} = Y(x,y).$$

Como existen $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$ \wedge $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$ y son continuas ¿por qué?, resulta:

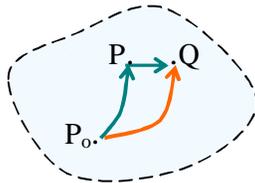
$$\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$$

↑ Por el teorema de inversión del orden de derivación.

$\therefore \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$. Esto dice que la integral no depende del camino de integración como queríamos probar.

(\Rightarrow)

Supongamos ahora que la integral no depende del camino de integración.



Entonces

Sean : $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, $Q = (x+h, y)$.

Llamemos $U(x, y) = \int_{P_0 P} X(\xi, \eta) d\xi + Y(\xi, \eta) d\eta$.

$$U(x+h, y) = \int_{P_0 Q} X d\xi + Y d\eta .$$

$$U(x+h, y) - U(x, y) = \int_{P_0 Q} X d\xi + Y d\eta - \int_{P_0 P} X d\xi + Y d\eta .$$

Como la integral no depende del camino de integración: $\int_{P_0 Q} = \int_{P_0 P} + \int_{PQ}$.

$$\therefore U(x+h, y) - U(x, y) = \int_{PQ} X d\xi + Y d\eta .$$

Parametrizamos el segmento PQ : $\begin{cases} \xi = t \\ \eta = y \\ x \leq t \leq x+h \end{cases} \quad \begin{cases} d\xi = dt \\ d\eta = 0 \end{cases}$

$$U(x+h, y) - U(x, y) = \int_x^{x+h} X(t, y) dt .$$

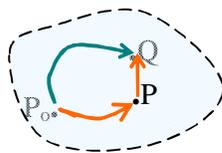
Por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, $\exists \theta, 0 \leq \theta \leq 1$:

$$U(x+h, y) - U(x, y) = h X(x+\theta h, y).$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} X(x+\theta h, y) = X(x, y) \text{ por la continuidad de } X(x, y).$$

$$\therefore \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = X(x, y) .$$

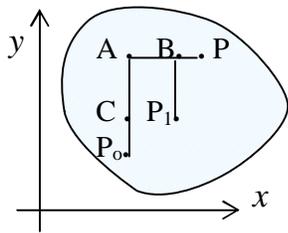
De igual manera se prueba $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Y(x, y)$, considerando :



El segmento PQ : $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = t \\ y \leq t \leq y+k \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} d\xi = 0 \\ d\eta = dt \end{cases}$

Y por lo tanto la forma diferencial $X(x, y) dx + Y(x, y) dy$ es exacta *Q.E.D.*

¿Cómo se determina una función potencial cuando $X dx + Y dy$ es exacta?



Cuando la región lo permite elegimos un camino P_0AP tal que $P_0A \parallel$ al eje oy y $AP \parallel$ al eje ox .

Entonces la integral que define a $\mathbf{U}(x, y) = \int_{P_0AP}$, tiene la forma siguiente: $\mathbf{U}(x, y) = \int_{P_0A} + \int_{AP}$.

$$\mathbf{U}(x, y) = \int_{y_0}^y X(x_0, \eta) d\eta + Y(x_0, \eta) d\eta + \int_{x_0}^x X(\xi, y) d\xi + Y(\xi, y) d\xi.$$

$$\mathbf{U}(x, y) = \int_{x_0}^x X(\xi, y) d\xi + \underbrace{\int_{y_0}^y Y(x_0, \eta) d\eta}_{\varphi(y)}. \quad \therefore \mathbf{U}(x, y) = \int_{x_0}^x X(\xi, y) d\xi + \varphi(y)$$

Si llamamos $\mathbf{U}_1(x, y) = \int_{P_1BP}$, \mathbf{U} y \mathbf{U}_1 difieren en una constante. En efecto:

$$\mathbf{U}(x, y) = \int_{P_0C} + \int_{CP_1} + \mathbf{U}_1(x, y); \quad \mathbf{U}(x, y) = \int_{y_0}^{y_1} Y(x_0, \eta) d\eta + \int_{x_0}^{x_1} X(\xi, y_1) d\xi + \mathbf{U}_1(x, y)$$

$$\therefore \mathbf{U}(x, y) - \mathbf{U}_1(x, y) = \text{cte.}$$

Ejemplo:

Sea la forma $(\underbrace{x^2 - 2xy}_{X(x, y)}) dx - (\underbrace{x^2 + y^2 + 1}_{Y(x, y)}) dy$. Es exacta en todo el plano.

$$\mathbf{U}(x, y) = \int (\xi^2 - 2\xi y) d\xi + \varphi(y).$$

$$\mathbf{U}(x, y) = \frac{x^3}{3} - 2y \frac{x^2}{2} + \varphi(y) + \text{Cte.}$$

$$\text{Como } \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = Y, \text{ tenemos: } \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = -x^2 + \varphi'(y) = -(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\therefore \varphi'(y) = -y^2 - 1$$

$$\varphi(y) = - \int (y^2 + 1) dy = -\frac{y^3}{3} - y + C.$$

$$\therefore \mathbf{U}(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} - yx^2 - y + C.$$

FORMAS DIFERENCIALES EN 3 VARIABLES.

La forma diferencial $X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$ es exacta si existe una función potencial $U(x, y, z)$ que verifique:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y, z) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y, z) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z(x, y, z) \quad .$$

Si suponemos que X, Y, Z junto con sus 1^{eras} derivadas son continuas en una región $D \subset \mathbb{R}^3$ simplemente conexa, entonces: condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial sea exacta es que en los pto. de la región se cumpla:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad .$$

La demostración es similar a la del caso de dos variables.

Cuando la forma es exacta la función potencial está dada por la integral :

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x X(\xi, y, z) d\xi + \varphi(y, z) \quad . \quad \text{Esta } U \text{ satisface :}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial X}{\partial y}(\xi, y, z) d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = Y \quad .$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Y}{\partial \xi}(\xi, y, z) d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = Y(x, y, z) \Rightarrow Y(x, \cancel{y}, z) - Y(x_0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = Y(x, \cancel{y}, z) \quad .$$

$$\text{Así } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = Y(x_0, y, z) \text{ y de la misma manera } \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, z) = Z(x_0, y, z) \quad .$$

Determinamos φ como hicimos para determinar U en el caso de 2 variables.

$$\text{Por lo tanto } \varphi(y, z) = \int_{y_0}^y Y(x_0, \eta, z) d\eta + \int_{z_0}^z Z(x_0, y_0, \zeta) d\zeta \quad .$$

$$\therefore U(x, y, z) = \int_{x_0}^x X(\xi, y, z) d\xi + \int_{y_0}^y Y(x_0, \eta, z) d\eta + \int_{z_0}^z Z(x_0, y_0, \zeta) d\zeta \quad .$$

INTEGRALES DE SUPERFICIE.

Superficie regular (definida paramétricamente).

Una superficie regular es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido paramétricamente por una función $g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuamente diferenciable tal que

$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
 $\forall (u,v) \in D^\circ \quad \vec{g}_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$ y $\vec{g}_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$ son linealmente independientes y $S = g(D)$.

Ejemplo 1:

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u,v) \mapsto (u+v, u-v, u)$
 $x = u+v$
 $y = u-v$
 $\frac{z = u}{x + y = 2z}$
 $\vec{g}_u(u,v) = (1,1,1)$, $\vec{g}_v(u,v) = (1,-1,0)$
 g es continuamente difble.
 $\{(1,1,1), (1,-1,0)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2z\}$ \therefore S es un plano que pasa por el origen.

Ejemplo 2:

$g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.
 $(u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$
 $x = \cos u$
 $y = \sin u$
 $\frac{z = v}{x^2 + v^2 = 1}$
 $\vec{g}_u(u,v) = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\vec{g}_v(u,v) = (0, 0, 1)$
 g es continuamente difble.
 $\{(-\sin u, \cos u, 0), (0, 0, 1)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ \therefore S es un cilindro.

Ejemplo 3:

$g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $D = \{(u,v) \mid u \neq 0\}$.
 $(u,v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u)$
 $x = u \cos v$
 $y = u \sin v$
 $\frac{z = u}{x^2 + y^2 = z^2}$
 g es continuamente difble.
 $\vec{g}_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 1)$; $\vec{g}_v(u,v) = (-u \sin v, u \cos v, 0)$
 $\{\vec{g}_u(u,v), \vec{g}_v(u,v)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2; (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$ \therefore S es un cono sin el vértice.

Ejemplo 4: Para la esfera usamos la siguiente parametrización:

$g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $D = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi; 0 < v < \pi\}$.
 $(u,v) \rightarrow (\mathbf{r} \sin v \cos u, \mathbf{r} \sin v \sin u, \mathbf{r} \cos v)$
 Esfera sin los polos.
 $\frac{x = \mathbf{r} \sin v \cos u}{y = \mathbf{r} \sin v \sin u}{z = \mathbf{r} \cos v}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{r}^2$

También podemos usar la siguiente parametrización para una semiesfera:

$g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq \mathbf{r}^2\}$
 $(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{\mathbf{r}^2 - x^2 - y^2})$.

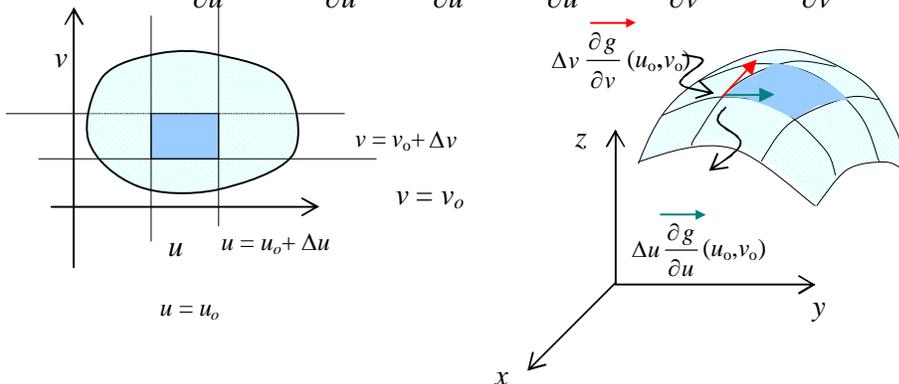
Área de Superficie.

Sea S una superficie regular parametrizada por :

$$g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) .$$

Llamemos $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \right)$; $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \right)$



La recta $v = v_0$ se transforma sobre S en la curva $u \mapsto g(u; v_0)$ cuya dirección en el punto $(u; v_0)$ es la del vector $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v_0)$, que podemos denotar $g_u(u, v_0)$.

Y la recta $u = u_0$ se transforma en la curva $v \mapsto g(u_0; v)$ cuya dirección en el punto $(u_0; v)$ es la del vector $\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v)$, que denotamos $g_v(u_0, v)$.

Una partición en D mediante rectas paralelas a los ejes coordenados, determina en S una partición mediante curvas $u \mapsto g(u; cte)$, $v \mapsto g(cte; v)$.

El área de una región genérica en D es $\Delta u \Delta v$ y en S , cuando la partición es suficientemente fina, el área ω_k de S_k (región genérica correspondiente o *rectángulo curvilíneo*), es aproximadamente igual a $\|g_u \times g_v\| \Delta u \Delta v$, que es el área del paralelogramo de lados $g_u \Delta u$, $g_v \Delta v$ en el plano tangente a S .

Este paralelogramo es la proyección de S_k sobre el plano tangente.

En resumen:

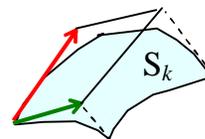
S_k : *rectángulo curvilíneo.*

$$S_k \subset S$$

ω_k : *área de S_k .*

$$\omega_k \text{ n}^\circ \text{ real}$$

$$\underbrace{\|g_u \times g_v\| \Delta u \Delta v}_{\text{n}^\circ \text{ real}} : \text{área del paralelogramo de lados } \underbrace{\bar{g}_u \Delta u, \bar{g}_v \Delta v}_{\text{vectores del plano tangente a } S}$$



$$\omega_k \approx \|g_u \times g_v\| \Delta u \Delta v .$$

Entonces, por definición A_S , el área de S , que denotamos $\iint_S d\omega$ es :

$$A_S = \iint_S d\omega = \iint_D \|g_u \times g_v\| du dv .$$

↷ ¿cuáles?

Observar que hemos definido el área de S como el límite de “sumas de Riemann”.

Si la parametrización de S es : $g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ A_S tiene la forma :
 $(x, y) \rightarrow (x, y, f(x,y))$

$$A_S = \iint_S d\omega = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)} dx dy .$$

En efecto :

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial x}(x,y) = (1, 0, f_x(x,y)); \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial y}(x,y) = (0, 1, f_y(x,y)); \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial y}(x,y) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$$

$$\therefore \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial y}(x,y) \right\| = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)} .$$

Ejemplo: hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = (z-4)^2$ en el 1er octante, entre los planos $z=1$, $z=3$, $y = \sqrt{3}x$, $y=0$.

S es tal que : $1 \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$ y $(x,y) \mapsto (x, y, 4 - \sqrt{x^2 + y^2})$

$$A_S = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)} dx dy .$$

$$2(z-4)z_x = 2x \Rightarrow z_x = \frac{x}{z-4} = \frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}}$$

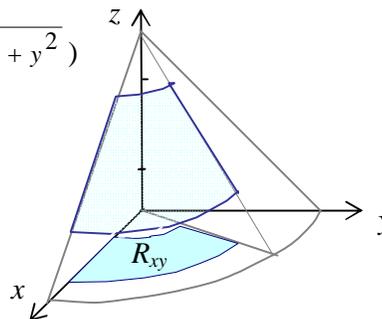
$$2(z-4)z_y = 2y \Rightarrow z_y = \frac{y}{z-4} = \frac{y}{-\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2} .$$

$$A_S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_R \rho d\rho d\varphi .$$

$$R : \quad \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ 1 &\leq \rho \leq 3 \end{aligned}$$

$$A_S = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^3 \rho d\rho = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi .$$



Como en el caso de las integrales curvilíneas, también existen integrales de superficie de dos tipos: *integrales de superficie de funciones reales* e *integrales de superficie de campos vectoriales*.

Integrales de Superficie de Funciones Reales.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular de ecuación $z = f(x,y)$, $\forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ y sea F una función real continua definida en S $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, continua .

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$$

Se define la integral de superficie de la función real F , que se denota $\int_S F d\omega$, así :

$$\iint_S F d\omega = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy .$$

Si la parametrización de la superficie es $g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\iint_S F d\omega = \iint_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|g_u \times g_v\| du dv .$$

Observar que la integral de superficie de la función real $F \equiv 1$ es el área de la porción de superficie.

Si interpretamos a S como la superficie de una lámina y a F como la densidad por unidad de superficie δ , de una distribución de masa en S , la masa total de la lámina es la integral de superficie de la función δ . $m = \iint_S \delta(x, y, z) d\omega$.

Vamos a definir ahora otro tipo de integrales de superficie. Las integrales de superficie de campos vectoriales.

Las superficies que se consideran para definir la integral de un campo son las superficies orientables también llamadas superficies biláteras porque se pueden distinguir dos caras o lados. Las superficies con una sola cara se llaman uniláteras.

Definición: Una superficie S se dice orientable si puede definirse un campo normal a S , continuo y distinto del vector nulo en cada punto.

En una superficie orientable, en cada punto (x, y, z) hay dos vectores normales a la superficie: \vec{n}_1 y \vec{n}_2 tales que $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Si g es la parametrización de S y llamamos \vec{n}_1 a la normal que tiene la dirección de $g_u \times g_v$, tenemos la orientación de una cara de la superficie y ese campo de normales es distinto de $\vec{0}$ en cada punto. La otra cara de la superficie tiene la orientación determinada por la normal \vec{n}_2 que tiene la dirección de $g_v \times g_u$, y este campo también es distinto de $\vec{0}$ en cada punto.

Ejemplos de superficies que no son biláteras: la Cinta de Moëbius y la Botella de Klein



Cinta de Moëbius



Botella de Klein

Integrales de Superficie de Campos vectoriales.

Supongamos que S sea una superficie regular parametrizada por $g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo continuo en $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $(x, y, z) \mapsto (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$.

Se define $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega$, la integral de superficie del campo \vec{F} , como:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iint_S (F_1(x,y,z) \cos\alpha + F_2(x,y,z) \cos\beta + F_3(x,y,z) \cos\gamma) \, d\omega.$$

Donde \vec{n} es un vector unitario normal a la superficie en cada punto.

$\vec{n}(x,y,z) = (\cos\alpha(x,y,z), \cos\beta(x,y,z), \cos\gamma(x,y,z))$. Sus componentes son los cosenos directores de \vec{n} . Esto es, los cosenos de los ángulos directores α, β, γ , que son los ángulos que forma \vec{n} con la dirección positiva de los ejes coordenados.

$$\vec{n} = \frac{\vec{g}_u \times \vec{g}_v}{\|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\|} \therefore \cos\alpha = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{\|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\|}, \cos\beta = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{\|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\|}, \cos\gamma = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{\|\vec{g}_u \times \vec{g}_v\|}.$$

Como $y_u z_v - z_u y_v = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $z_u x_v - x_u z_v = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$, $x_u y_v - y_u x_v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

Podemos escribir:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iint_D [F_1(g(u,v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + F_2(g(u,v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + F_3(g(u,v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}] \, du \, dv.$$

Que se suele abreviar así: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iint_S F_1 \, dy \wedge dz + F_2 \, dz \wedge dx + F_3 \, dx \wedge dy$.

O simplemente $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iint_S F_1 \, dydz + F_2 \, dzdx + F_3 \, dxdy$, por lo siguiente:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega &= \iint_S [F_1(x,y,z) \cos\alpha + F_2(x,y,z) \cos\beta + F_3(x,y,z) \cos\gamma] \, d\omega. \\ &= \iint_S [F_1(x,y,z) \cos\alpha \, d\omega + F_2(x,y,z) \cos\beta \, d\omega + F_3(x,y,z) \cos\gamma \, d\omega]. \end{aligned}$$

Para $\iint_S F_3(x,y,z) \cos\gamma \, d\omega$ parametrizamos la superficie S así:

$$g: R_{xy} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad . \text{ La normal es}$$

$$(x,y) \mapsto (x, y, z(x, y))$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{g}_x \times \vec{g}_y}{\|\vec{g}_x \times \vec{g}_y\|}; \quad \vec{g}_x = (1, 0, z_x(x, y)) \therefore \vec{g}_x \times \vec{g}_y = (-z_x, -z_y, 1); \quad \|\vec{g}_x \times \vec{g}_y\| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

$$\vec{g}_y = (0, 1, z_y(x, y))$$

$$\cos \gamma > 0 \text{ si } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \text{ resulta } \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \begin{matrix} \cos \gamma < 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi \\ \cos \gamma > 0 \text{ si } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

Entonces

$$\iint_S F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega = \iint_{R_{xy}} F_3(x,y,z(x,y)) \frac{1}{\pm \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dx \, dy$$

$$\iint_S F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega = \iint_{R_{xy}} F_3(x,y,z(x,y)) (\pm 1) \, dx \, dy$$

El signo depende del ángulo γ

Para $\iint_S F_2(x,y,z) \cos \beta \, d\omega$ parametrizamos la superficie S así

$$g: R_{xz} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{y para } \iint_S F_1(x,y,z) \cos \alpha \, d\omega, \quad g: R_{yz} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

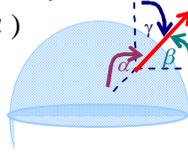
$$(x,z) \mapsto (x, y(x,z), z)$$

$$(y,z) \mapsto (x(y,z), y, z)$$

Ejemplo:

Sea $\vec{F} = (x, y, z)$ un campo vectorial y S la cara exterior de la superficie de la semiesfera de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$. (Si S es la cara exterior, la normal apunta hacia afuera)

Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega$.



Si parametrizamos la superficie así:

$$\vec{n} = \vec{g}_v \times \vec{g}_u$$

$$x = \cos v \cos u \quad 0 \leq u \leq 2\pi; \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos v \sin u$$

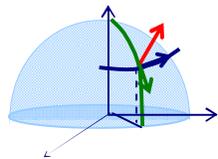
$$z = \sin v$$

$$\vec{g}_v(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, -\sin v)$$

$$\vec{g}_u(u, v) = (-\sin v \sin u, \sin v \cos u, 0)$$

$$\|\vec{g}_v \times \vec{g}_u\| = \|(\sin^2 v \cos u, \sin^2 v \sin u, \sin v \cos v)\| = |\sin v| = \sin v$$

¿por qué?



$n = \vec{g}_v \times \vec{g}_u$ la normal apunta hacia fuera de la superficie

$$-n = \vec{g}_u \times \vec{g}_v$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iint_D (\sin v \cos u)(\sin^2 v \cos u) + (\sin v \sin u)(\sin^2 v \sin u) + \cos v(\sin v \cos v) \, du \, dv$$

$$= \iint_D [\sin^3 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + \sin v \cos^2 v] \, du \, dv$$

$$= \iint_D [\sin v (\cos^2 v + \sin^2 v)] \, du \, dv = \iint_D \sin v \, du \, dv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi/2} \sin v \, dv = 2\pi$$

Otra forma de resolver el problema es calcular cada una de las integrales

$\iint_S F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega$, $\iint_S F_2(x,y,z) \cos \beta \, d\omega$, $\iint_S F_1(x,y,z) \cos \alpha \, d\omega$, y sumarlas.

$$\text{Veamos que } \iint_S F_2(x,y,z) \cos \beta \, d\omega = \iint_{S_1} F_2 \cos \beta \, d\omega + \iint_{S_2} F_2 \cos \beta \, d\omega = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_{S_1} F_2 \cos \beta \, d\omega = \iint_{R_{xz}} \sqrt{1-x^2-z^2} \, (+1) \, dx \, dz$$

$$\iint_{S_2} F_2 \cos \beta \, d\omega = \iint_{R_{xz}} -\sqrt{1-x^2-z^2} \, (-1) \, dx \, dz$$

$$\text{resolviendo en polares } \iint_{R_{xz}} 2\sqrt{1-x^2-z^2} \, dx \, dz = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Análogamente } \iint_S F_1(x,y,z) \cos \alpha \, d\omega = \frac{2\pi}{3}, \quad \iint_S F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega = \frac{2\pi}{3} \quad \therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = 2\pi$$

TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKI.

El teorema de Gauss-Ostrogradski, también llamado teorema de la divergencia, relaciona integrales de superficie con integrales triples.

Teorema de Gauss-Ostrogradski:

Sea T una región cerrada y acotada en \mathbb{R}^3 (T es un sólido), cuya frontera es una superficie S regular a trozos tal que en cada punto el vector normal a S apunta hacia afuera de T (orientación positiva de S).

Sea $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuamente diferenciable

$P \mapsto (F_1(P), F_2(P), F_3(P))$ tal que A es abierto y $T \subset A$.

$$\text{Entonces } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iiint_T \text{div} \vec{F} \, dV.$$

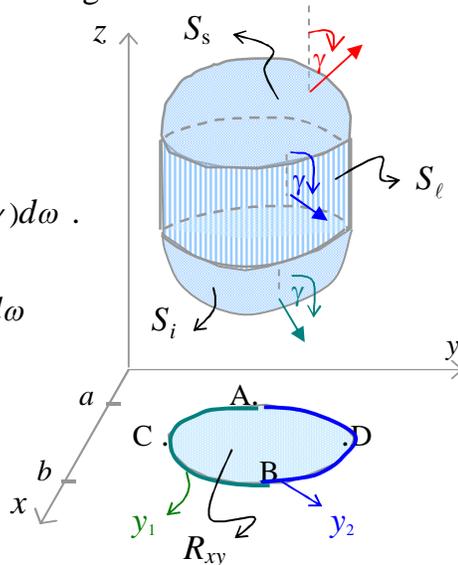
Demostración:

Por las hipótesis hechas, la superficie S se compone de un casquete superior S_s , uno inferior S_i , y la porción lateral de superficie S_ℓ que en algunos casos se reduce a una curva. $S = S_s \cup S_i \cup S_\ell$.

$$\begin{aligned} \iiint_T \text{div} \vec{F} \, dV &= \iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega &= \iint_S (F_1(x,y,z) \cos \alpha + F_2(x,y,z) \cos \beta + F_3(x,y,z) \cos \gamma) d\omega. \end{aligned}$$

$$\text{Vamos a probar } \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_S F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega$$

y con un razonamiento análogo se demuestran las otras dos igualdades:



$$\iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz = \iint_S F_1(x,y,z) \cos \alpha \, d\omega. \quad \iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz = \iint_S F_2(x,y,z) \cos \beta \, d\omega.$$

El sólido T y la región R_{xy} están definidos por :

$$T = \{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x); z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \}.$$

$$R_{xy} = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$

$$\iint_S F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega = \iint_{S_s} F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega + \iint_{S_i} F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega + \iint_{S_\ell} F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega.$$

Para calcular $\iint_S F_3(x,y,z) \cos \gamma \, d\omega$, parametricemos S_s y S_i .

$S_s: g: R_{xy} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \therefore$ la ecuación de S_s es $z = z_2(x, y)$
 $(x, y) \mapsto (x, y, z_2(x, y))$

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma); \quad \vec{n} = \frac{\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y}{\pm \|\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y\|}$$

$$\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y = \left(1, 0, \frac{\partial z_2}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial z_2}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial z_2}{\partial x}, -\frac{\partial z_2}{\partial y}, 1\right)$$

$$\therefore \cos\gamma = \frac{1}{\|\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y\|} \quad \text{pues } \cos\gamma > 0 \text{ porque } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

$$\iint_{S_s} F_3(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_2(x, y)) \frac{1}{\|\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y\|} \|\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y\| \, dx \, dy.$$

$$\boxed{\iint_{S_s} F_3(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_2(x, y)) \, dx \, dy}$$

$S_i: g: R_{xy} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \therefore$ la ecuación de S_i es $z = z_1(x, y)$
 $(x, y) \mapsto (x, y, z_1(x, y))$

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma); \quad \vec{n} = \frac{\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y}{\pm \|\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y\|}$$

$$\therefore \cos\gamma = \frac{1}{-\|\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y\|} \quad \text{pues } \cos\gamma < 0 \text{ porque } \frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \pi.$$

$$\boxed{\iint_{S_i} F_3(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega = \iint_{R_{xy}} -F_3(x, y, z_1(x, y)) \, dx \, dy}$$

$\iint_{S_\ell} F_3(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega = 0$ pues $\cos\gamma = 0$ porque $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$\boxed{\iint_S F_3(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_2(x, y)) \, dx \, dy - \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_1(x, y)) \, dx \, dy} \quad (1)$$

$$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} [F_3(x, y, z_2(x, y)) - F_3(x, y, z_1(x, y))] \, dy.$$

$$= \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_2(x, y)) \, dx \, dy - \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_1(x, y)) \, dx \, dy \quad \therefore$$

$$\boxed{\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_2(x, y)) \, dx \, dy - \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, z_1(x, y)) \, dx \, dy} \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue $\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_S F_3(x, y, z) \cos\gamma \, d\omega$, como queríamos probar.

Ejemplo.

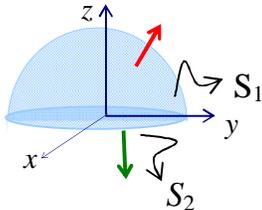
Sea $\vec{F} = (x, y, z)$ y S el sólido limitado superiormente por la semiesfera de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$. e inferiormente por el plano $z = 0$.

Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega.$$

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 ; z \geq 0.$$

$$S_2 : z = 0$$



Como se cumplen las hipótesis del teorema de Gauss-Ostrogradski,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_T (1+1+1) \, dV = 3V(T) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi = 2\pi.$$

$$\therefore \boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = 2\pi}$$

Observar que $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega$.

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = 2\pi \quad (\text{como se ha obtenido en el ejercicio de pág. 107. Ahí } S, \text{ era } S_1)$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\omega = \iint_{S_2} x \cos \alpha \, d\omega + y \cos \beta \, d\omega + z \cos \gamma \, d\omega = 0 \quad \text{porque } \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}; \quad y \quad z = 0$$

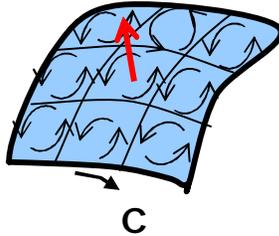
Con respecto a la orientación de las caras de una superficie bilátera que no es la frontera de un sólido, observemos lo siguiente.

Al elegir una cara de la superficie bilátera, en cada punto la normal \vec{n} apunta en un sentido y, en el mismo punto en la cara opuesta, la normal es $-\vec{n}$.

Sea S es una superficie regular, parametrizada por $g: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

Al dividir S en un número finito de celdas (*superficies parciales que provienen de una partición en D*) se asigna, a los puntos de cada celda, un sentido positivo de la normal \vec{n} determinando un sentido de rotación en los lados (*el de un tornillo de mano derecha*). Cuando la superficie es bilátera, en cada cara de la superficie, las celdas contiguas tienen en la parte común, sentidos opuestos, por lo que el borde de S es una curva C cerrada recorrida en sentido positivo (*el sentido en el que un observador caminando a lo largo de C deja a la superficie S a su izquierda*)



El teorema de Stokes o teorema del rotor relaciona integrales de superficie con integrales curvilíneas.

TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie bilátera y por lo tanto orientada, acotada cuyo borde es una curva C . Supongamos una de las 2 caras de S como positiva y orientemos C en el sentido positivo.

Sea $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo continuamente diferenciable en U abierto tal que $S \subset U$.
 $(x, y, z) \rightarrow (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$

Entonces :

$$\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dw = \oint_C F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz.$$

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Demostración:

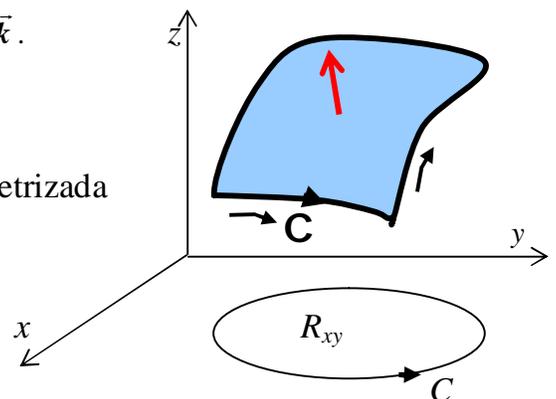
Para la demostración vamos a suponer a S parametrizada por g , así:

$$g: R_{xy} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$(x, y) \rightarrow (x, y, z(x, y))$$

$$\text{Suponemos } 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

$$n = \frac{g_x \times g_y}{\|g_x \times g_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1) \quad \therefore \frac{\cos \alpha}{-z_x} = \frac{\cos \beta}{-z_y} = \cos \gamma \quad (1)$$



$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dw &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cos \lambda \right] dw = \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial F_1}{\partial y} \cos \lambda \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \cos \lambda - \frac{\partial F_2}{\partial z} \cos \alpha \right) + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial F_3}{\partial x} \cos \beta \right) \right] dw. \end{aligned}$$

Vamos a probar:

$$\boxed{\iint_S \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial F_1}{\partial y} \cos \lambda \right) \right] dw = \oint_C F_1(x, y, z) \, dx} \quad (*)$$

Y de igual manera se prueba

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \cos \lambda - \frac{\partial F_2}{\partial z} \cos \alpha \right) \right] dw = \oint_C F_2 \, dy. \quad \text{y} \quad \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial F_3}{\partial x} \cos \beta \right) \right] dw = \oint_C F_3 \, dz$$

$$\oint_C F_1(x, y, z) \, dx = \oint_C F_1(x, y, z(x, y)) \, dx = \oint_C X(x, y) \, dx \quad . \text{ donde } F_1(x, y, z(x, y)) = X(x, y)$$

Por el teorema de Gauss Green es :

$$\begin{aligned} \oint_C X(x, y) \, dx &= - \iint_{R_{xy}} \frac{\partial X}{\partial y} \, dx \, dy = - \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} z_y \right) dx \, dy \\ &= - \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} z_y \right) dx \, dy = - \iint_S \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} z_y \right) \cos \gamma \, dw \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} (-z_y) \cos \gamma - \frac{\partial F_1}{\partial y} \cos \gamma \right) \right] dw. \quad \text{De (1) } (-z_y) \cos \gamma = \cos \beta \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\oint_C F_1(x, y, z) \, dx = \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial F_1}{\partial y} \cos \lambda \right) \right] dw}$$

Que es (*), lo que queríamos probar.

La integral de superficie de un campo se llama el **flujo** del campo a través de la superficie en la dirección de la normal y la integral curvilínea de un campo a lo largo de una curva se llama la **circulación** del campo a lo largo de la curva.

El teorema de Stokes dice que el flujo del campo **rotor F** a través de **S** en la dirección de la normal es igual a la circulación de **F** a lo largo de **C** en el sentido positivo.