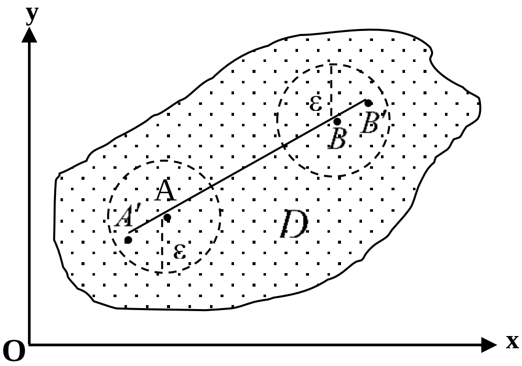
TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Sea $f : D \subset R^2 \to R$ diferenciable en el interior de D. Sean $A \in \overset{\circ}{D}$ y $B \in \overset{\circ}{D}$ tales que el segmento de extremos A y B está contenido en el interior de D, entonces existe C perteneciente
al segmento $\overline{AB}$ tal que $f(B) - f(A) = \nabla f(C).(B - A)$.



Demostración

- Si $A = B$ la tesis es trivial ya que resulta 0 = 0.
- Si $A \neq B$, por ser $A \in \overset{\circ}{D}$ y $B \in \overset{\circ}{D}$ es siempre

posible determinar puntos $A' \in \overset{\circ}{D}$ y $B' \in \overset{\circ}{D}$
(ver figura) tales que :

1) $\overline{AB} \subset \overline{A'B'} \subset \overset{\circ}{D}$

2) $\forall P \in \overline{A'B'}$ $P = A + t(B - A)$, $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ y $\varepsilon > 0$.

Los valores que toma f en $\overline{A'B'}$ son: $f(P) = f(A + t(B - A))$ con $-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$

Entonces definimos la función: $\phi(t) = f(P) = f(A + t(B - A))$ para $-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$

¿Existe $\phi'(t)$ si $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$? ¿Cumple ϕ las hipótesis del T.V.M.C.D para funciones de una variable en $[0,1]$?

Observamos que:

- ϕ es una función compuesta:

$$\phi(t) = f(A + t(B - A)) = f\left((x_A, y_A) + t[(x_B, y_B) - (x_A, y_A)] \right)$$
$$= f\left(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\right) \quad \text{para } -\varepsilon < t < 1+\varepsilon$$

Luego $\phi(t) = f\left(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\right) = f(x(t), y(t))$ para $-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$

- ϕ es continua en $-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$ por ser composición de funciones continuas: " *f* " es continua ya que por hipótesis es diferenciable en $\overset{\circ}{D}$ y "*x*" e "*y*" son continuas por ser funciones lineales.
- ϕ es diferenciable en $-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$ por la Regla de la Cadena ya que: " *f* " es diferenciable por hipótesis en $\overset{\circ}{D}$ y "*x*" e "*y*" son derivables respecto a "*t*" por ser funciones lineales.

Utilizando la Regla de la Cadena, podemos calcular la derivada total de ϕ respecto a "*t*" para $-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$

$$\phi'(t) = f_x\left(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\right)x'(t) + f_y\left(x_A + t(x_B - x_A), y_B + t(y_B - y_A)\right)y'(t)$$

(1) $= f_x\left(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\right)(x_B - x_A) +$
$f_y\left(x_A + t(x_B - x_A), y_B + t(y_B - y_A)\right)(y_B - y_A)$

Pero, para $-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$ $\quad (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)) = A + t(B-A) =$
$P \in \overline{A'B'}$

Entonces (1) = $((f_x(P), f_y(P)) \cdot ((x_B - x_A), (y_B - y_A)) = \nabla f(P) \cdot$(B-A)

$$= \|B-A\| \left(\nabla f(P) \cdot \frac{B-A}{\|B-A\|}\right) = \|B-A\| \; D_{\frac{B-A}{\|B-A\|}} f(P)$$

Luego $\phi'(t) = \|B-A\| \; D_{\frac{B-A}{\|B-A\|}} f(P) \qquad -\varepsilon < t < 1+\varepsilon, \; \varepsilon > 0$ y $P \in \overline{A'B'}$

Entonces ϕ es contínua en $[0,1] \subset (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ y es derivable en $(0,1) \subset (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ pues es derivable en $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. La función ϕ cumple en el intervalo $[0,1]$ las hipótesis del Teorema del

Valor medio del Cálculo Diferencial para funciones de una variable, luego vale también la tesis:

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta)(1-0) \qquad 0 < \theta < 1$$

Igualdad que expresada en función de f toma la forma:

$$f(B) - f(A) = \|B-A\| \; D_{\frac{B-A}{\|B-A\|}} f(A + \theta(B-A)) \qquad 0 < \theta < 1 \quad (1)$$

Pero si $\quad 0 < \theta < 1 \Rightarrow A + \theta(B-A) = C \in \overline{AB}$ y por ser f diferenciable en $\overline{AB} \subset \overset{\circ}{D}$ por hipótesis

$$D_{\frac{B-A}{\|B-A\|}} f(C) = \nabla f(C) . \frac{B-A}{\|B-A\|} = \frac{1}{\|B-A\|} \nabla f(C) . (B-A)$$

Luego reemplazando en (1) $\quad f(B) - f(A) = \nabla f(C) . (B-A)$ con $C \in \overline{AB}$ que es la tesis.